type ϱ_1, all of whose elements are zero except the first, which is one. If a_γ has been defined for all $\gamma<\nu(\alpha)$ by means of the ϱ_γ for $\gamma<\alpha$, then add a sequence of type ϱ_α all of whose elements are zero except the first, which is one. This inductive process defines $A_{\nu(\beta)}$. We have $\beta\leqslant\nu(\beta)\leqslant\omega_\tau\beta$, so $\nu(\beta)=\beta$ whenever β is a multiple of $\omega_\tau{}^\omega$. For ordinals β of this form, define Z_β as the family of all sequences A_β derived from elements A'_β of Z'_β; the correspondence between Z_β and Z'_β is one-one for each such β. Define Z_α in general to be the family of segments of type α of sequences belonging to Z_β, for any Z_β already defined where $\alpha<\beta$.

The Z_α so constructed satisfy the conditions of the problem, but there is *no* sequence of zeros and ones of type ω_μ, each of whose segments belongs to a Z_α. For if there were such a sequence A, we could reverse the process by which the Z_α were defined to produce a sequence A' of ordinals smaller than ω_τ, in which no ordinal appears twice, and of ordinal type ω_μ.

To consider the case where μ is a limit ordinal, find λ so that ω_λ is the smallest ordinal such that ω_μ is the limit of a sequence $\{\delta_\gamma\}_{\gamma<\omega_\lambda}$ of type ω_λ. If $\lambda=0$, ω_μ is the limit of a denumerable sequence, and the solution is positive. Suppose λ is an infinite limit ordinal; then ω_λ is not the limit of any sequence of type smaller than itself. That is to say that ω_λ is a regular initial ordinal with limit index, or that $\aleph_\lambda$ is an *inaccessible cardinal.*

Certainly ω_μ is not smaller than ω_λ; *the problem remains open for this case.*

The only remaining possibility is that $\lambda>0$ is not a limit ordinal, and we can extend the preceding construction to establish a negative answer as follows:

Since λ is not a limit ordinal, we can construct sets Z_α (for all $\alpha<\omega_\lambda$) so that Z does not exist. For each sequence $A_\alpha=\{a_\gamma\}_{\gamma<\alpha}$ define a sequence $C_{\delta_\alpha}=\{c_\varepsilon\}_{\varepsilon<\delta_\alpha}$ of type δ_α by setting $c_\varepsilon=0$ unless $\varepsilon=\delta_\gamma$ for some $\gamma<\alpha$; in which case set $c_\varepsilon=a_\gamma$. Let Y_α $(\alpha<\omega_\mu)$ be the set of sequences of type α so constructed if α is some δ_γ; otherwise define the sequences of Y_α by means of the segments of sequences already defined.

The sets Y_α evidently furnish the counter-example.

SUR UN PROBLÈME DE SIKORSKI

PAR

E. SPECKER (ZURICH)

Dans une conférence tenue à Zurich, Sikorski a posé le problème suivant. Soient: ω_μ un nombre initial régulier [1]) et, pour chaque $\alpha<\omega_\mu$, D_α un ensemble de suites de type α formées de 0 et de 1, les D_α jouissant des propriétés suivantes:

(1) D_1 n'est pas vide,

(2) Si $\alpha<\beta<\omega_\mu$, toute suite de D_β est un prolongement [2]) d'une suite de D_α,

(3) Si $\alpha<\beta<\omega_\mu$, toute suite de D_α admet un prolongement dans D_β,

(4) $\overline{\overline{D}}_\alpha<\aleph_\mu$ $(\alpha<\omega_\mu)$.

Sous ces hypothèses, *existe-t-il une suite de type ω_μ qui soit pour tout $\alpha<\omega_\mu$ prolongement d'une suite de D_α?*

Sikorski a déjà posé le même problème [3]) pour des ensembles jouissant des propriétés (1), (2), (3), et Helson a montré [4]) que la réponse est négative pour $\omega_\mu=\omega_{\nu+1}$. En m'inspirant de sa méthode, j'ai réussi à prouver que la réponse au problème embrassant la propiété (4) est *négative pour $\omega_\mu=\omega_1$*. Nous avons ensuite remarqué, Sikorski et moi, que *sous l'hypothèse $2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$ il en est de même pour $\omega_{\nu+1}$, quand ω_ν est un nombre initial régulier*; cette communication est consacrée à démontrer cela par la construction d'un exemple.

Considérons des suites formées non pas de 0 et de 1, mais — ce qui revient au même d'après Helson [4]) — d'éléments appartenant à un ensemble E_ν de puissance $\aleph_\nu$. Admettons de plus que l'ensemble E_ν est ordonné. Toutes les suites considérées

---

[1]) F. Hausdorff, *Mengenlehre*, 3-me édition, Berlin 1935, p. 73.

[2]) Une suite $\mathfrak{b}=\{b_\xi\}_{\xi<\beta}$ est dite *prolongement* de la suite $\mathfrak{a}=\{a_\xi\}_{\xi<\alpha}$, si $a_\xi=b_\xi$ pour $\xi<\alpha$, ce que nous noterons $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{b}$.

[3]) voir R. Sikorski, Colloquium Mathematicum 1 (1948), p. 35, **P19.**

[4]) Henry Helson, *On a problem of Sikorski*, ce fascicule, p. 7-8.

seront entendues proprement croissantes, même sans mention expresse. Soit $\mathfrak{a}=\{a_\xi\}$ une telle suite; nous écrirons:

$$|\mathfrak{a}|<a, \quad \text{si} \quad a_\xi<a,$$

$$|\mathfrak{a}|\boldsymbol{<}a, \text{ s'il existe un } a' \text{ tel que } a_\xi<a'<a.$$

Admettons que E_ν satisfait aux deux conditions suivantes:

(a) Si $\mathfrak{a}$ est une suite de type $\alpha<\omega_\nu$ et $|\mathfrak{a}|<a$, on a $|\mathfrak{a}|\boldsymbol{<}a$.

(b) Si $\mathfrak{a}$ est une suite de type $\alpha<\omega_\nu$, il existe un a tel que $|\mathfrak{a}|<a$.

La condition (b) simplifiera l'exposé, mais elle n'est pas essentielle. Un ensemble E_ν ordonné satisfaisant à (a) et (b) existe certainement, si ω_ν est un nombre initial régulier [5]).

Enfin, admettons que l'ensemble des suites (d'éléments de E_ν) de type $\alpha<\omega_{\nu+1}$ est bien ordonné et que toute ω_ν-limite $\lambda<\omega_{\nu+1}$ est représentée de façon déterminée comme telle:

$$\lambda=\lim_{\xi<\omega_\nu}\lambda_\xi(\lambda).$$

Nous définissons les ensembles D_α par récurrence:

I. D_1 est l'ensemble de toutes les suites de type 1.

II. On a $\mathfrak{a}\,\epsilon\,D_\alpha$ pour $\alpha=\beta+1$ et, pour $\alpha=\lim\limits_{\xi<\omega_\sigma<\omega_\nu}\alpha_\xi$, si et seulement si $\mathfrak{a}$ est pour tout $\xi<\alpha$ prolongement d'une suite de D_ξ.

III. On a $\mathfrak{a}\,\epsilon\,D_\alpha$ pour $\alpha=\lim\limits_{\xi<\omega_\nu}\lambda_\xi(\alpha)$, si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

1° pour tout $\xi<\alpha$, $\mathfrak{a}$ est prolongement d'une suite de D_ξ,

2° il existe un $\xi_0<\omega_\nu$ et un $a\,\epsilon\,E_\nu$ tels que si $\xi_0\leqslant\varkappa<\omega_\nu$, la suite $\mathfrak{a}_\varkappa$ est le premier des éléments de $D_{\lambda_\varkappa}(\alpha)$ pour lequel on a $\mathfrak{a}_\chi\subset\mathfrak{a}_\varkappa$ $(0\leqslant\chi<\varkappa)$ et $|\mathfrak{a}_\varkappa|\boldsymbol{<}a$; ici $\mathfrak{a}_\sigma$ désigne la suite de $D_{\lambda_\sigma}(\alpha)$ dont $\mathfrak{a}$ est un prolongement.

Aucune suite de type $\omega_{\nu+1}$ n'est prolongement d'une suite de D_ξ pour tous les $\xi<\omega_{\nu+1}$; en effet, l'ensemble des éléments d'une suite proprement croissante de type $\omega_{\nu+1}$ est de puissance $\aleph_{\nu+1}$, tandis que $\overline{\overline{E}}_\nu=\aleph_\nu$.

---

[5]) Les corps W_ν de R. Sikorski (*On an ordered algebraic field*, Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, 41 (1948), à paraître) en fournissent un exemple.

La démonstration sera achevée dès qu'on aura montré que les ensembles D_α jouissent des propriétés (1), (2), (3) et (4). Les propriétés (1) et (2) sont évidentes. Pour établir (3), nous allons démontrer par induction suivant β la proposition plus forte:

(*) *Soient* $\alpha<\beta$, $\mathfrak{a}\,\epsilon\,D_\alpha$ *et* $|\mathfrak{a}|\boldsymbol{<}a$; *alors il existe un* $\mathfrak{b}\,\epsilon\,D_\beta$ *tel que* $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{b}$ *et* $|\mathfrak{b}|\boldsymbol{<}a$.

Cette proposition est vraie pour $\beta=1$ et — comme on le voit facilement — pour $\beta+1$, si elle est vraie pour β. Soit donc $\beta=\lim\limits_{\xi<\omega_\sigma}\beta_\xi$ pour $\omega_\sigma\leqslant\omega_\nu$ et $\beta_\xi=\lambda_\xi(\beta)$ pour $\omega_\sigma=\omega_\nu$. Soit $\xi_0<\omega_\sigma$ et $\alpha<\beta_{\xi_0}$. D'après l'hypothèse d'induction, il existe un $\mathfrak{i}\,\epsilon\,D_{\beta_{\xi_0}}$ tel que $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{i}$ et $|\mathfrak{i}|\boldsymbol{<}a$; soit a' un élément pour lequel $|\mathfrak{i}|\boldsymbol{<}a'<a$. Si $\mathfrak{i}_\varphi\,\epsilon\,D_{\beta_\varphi}$ et $\eta<\varphi$, désignons par $\mathfrak{i}_\varphi^\eta$ la suite de D_{β_η} dont $\mathfrak{i}_\varphi$ est un prolongement. Nous allons montrer par induction suivant φ que

$\binom{*}{*}$ *Pour* $\xi_0\leqslant\varphi<\omega_\sigma$, *il y a un et un seul* $\mathfrak{i}_\varphi$ *satisfaisant aux conditions suivantes:* $\mathfrak{i}\subset\mathfrak{i}_\varphi$, $|\mathfrak{i}_\varphi|\boldsymbol{<}a'$ *et, pour* $\xi_0\leqslant\zeta<\eta<\varphi$, $\mathfrak{i}_\varphi^\eta$ *est la première suite de* D_{β_η} *telle que* $\mathfrak{i}_\eta^\xi\subset\mathfrak{i}_\varphi^\eta$ *et* $|\mathfrak{i}_\varphi^\eta|\boldsymbol{<}a'$.

La proposition $\binom{*}{*}$ est vraie pour $\varphi=\xi_0$ et — comme on le voit facilement — pour $\varphi+1$, si elle est vraie pour φ. Soit donc $\varphi=\lim\limits_{\varkappa<\omega_\varrho}\varphi_\varkappa$ où $\omega_\varrho<\omega_\sigma\leqslant\omega_\nu$; l'unicité de $\mathfrak{i}_{\varphi_\iota}$ entraîne $\mathfrak{i}_{\varphi_\iota}\subset\mathfrak{i}_{\varphi_\varkappa}$ pour $\iota<\varkappa$ et, par conséquent, l'existence d'une suite $\mathfrak{i}_\varphi$ de type β_φ telle que $\mathfrak{i}_{\varphi_\varkappa}\subset\mathfrak{i}_\varphi$. On a $\mathfrak{i}_\varphi\,\epsilon\,D_{\beta_\varphi}$ et $|\mathfrak{i}_\varphi|\boldsymbol{<}a'$; l'unicité de $\mathfrak{i}_\varphi$ résulte de l'égalité $\mathfrak{i}_\varphi^\eta=\mathfrak{i}_\eta$ pour $\eta<\varphi$.

Il est ainsi établi qu'il existe des suites $\mathfrak{i}_\varphi$, donc aussi une suite $\mathfrak{b}$ de type β, telle que $\mathfrak{i}_\varphi\subset\mathfrak{b}$ et $|\mathfrak{b}|<a'<a$. On voit aisément que $\mathfrak{b}\,\epsilon\,D_\beta$.

Montrons enfin que la condition (4) est vérifiée:

$$\overline{\overline{D}}_1=\overline{\overline{E}}_\nu=\aleph_\nu \qquad \text{et} \qquad \overline{\overline{D}}_{\alpha+1}=\overline{\overline{D}}_\alpha.$$

Soit d'abord $\alpha=\lim\limits_{\xi<\omega_\nu}\lambda_\xi$; $\mathfrak{a}\,\epsilon\,D_\alpha$ est univoquement déterminé par les ξ_0, $\mathfrak{a}_{\xi_0}\,\epsilon\,D_{\lambda_{\xi_0}}$ et $a\,\epsilon\,E_\nu$ intervenant dans III, 2°; on a par conséquent $\overline{\overline{D}}_\alpha=\aleph_\nu\cdot\aleph_\nu\cdot\aleph_\nu=\aleph_\nu$, ce qui prouve la validité de (4) dans le cas $\omega_\nu=\omega_1$.

Soit maintenant $\alpha = \lim\limits_{\xi<\omega_\sigma<\omega_\nu} \alpha_\xi$; $\mathfrak{a} \epsilon D_\alpha$ est univoquement determiné par les suites $\mathfrak{a}_\xi \epsilon D_\xi$ dont $\mathfrak{a}$ est un prolongement, d'où $\overline{\overline{D_\alpha}} \leqslant \aleph_\nu^{\aleph_\sigma}$ $(\aleph_\sigma < \aleph_\nu)$. Si $\aleph_\nu = \aleph_{\tau+1}$, on a $\aleph_{\tau+1}^{\aleph_\sigma} = 2^{\aleph_\tau \cdot \aleph_\sigma} = 2^{\aleph_\tau} = \aleph_{\tau+1}$; pour les nombres inaccesibles, l'égalité $\aleph_\nu^{\aleph_\sigma} = \aleph_\nu$ $(\aleph_\sigma < \aleph_\nu)$ se déduit d'un théorème de Tarski[6]), et peut même être établie sans l'hypothèse $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, lorsque ω_ν est inaccessible au sens étroit[7]).

[6]) A. Tarski, *Quelques théorèmes sur les alephs*, Fundamenta Mathematicae 7 (1925), p. 1-14, théorème 7 (p. 7).

[7]) A. Tarski, *Über unerreichbare Kardinalzahlen*, Fundamenta Mathematicae 25 (1935), p. 68-89.

REMARKS ON MEASURE AND CATEGORY

BY

E. MARCZEWSKI (WROCŁAW) AND R. SIKORSKI (WARSAW)

We call a *measure* every σ-additive set function $\mu(X)$, such that $0 \leqslant \mu(X) \leqslant \infty$, defined in a σ-additive field of subsets of a set $\mathscr{X}$. A measure μ is said to be *σ-finite if* $\mathscr{X}$ is the sum of an enumerable sequence of sets of finite measure μ.

A measure μ defined on the field of all Borel subsets of a topological space[1]) $\mathscr{X}$ is called a *Borel measure* in $\mathscr{X}$.

In this paper $\mathscr{X}$ always denotes a topological space, and μ a Borel measure in $\mathscr{X}$. Our chief problem is the existence of the[2]) decomposition:

(*) $\mathscr{X} = H + K$, where $\mu(H) = 0$ and K is of the first category[3]) in $\mathscr{X}$.

We shall show in a very simple way that the decomposition (*) exists e. g. for α-dimensional measures in separable metric spaces (theorem (iii)), in particular for the linear measure in the plane.

It results from one of our theorems on measures in non-separable spaces that the decomposition (*) is possible for any σ-finite Borel measure vanishing for all one-point sets[3]) whenever $\mathscr{X}$ is a metric space containing a dense subset of potency less than the first innaccessible aleph (theorem (vi)).

[1]) A space is called *topological* if it satisfies the well-known axioms of Kuratowski. See [2], p. 20.

[2]) Since every set of the first category is contained in a set F_σ of the first category, we may always assume (whenever the decomposition (*) is possible) that K is an F_σ and H is a G_δ.

[3]) Our problem can be reduced to the case of measures vanishing for every one-point set. In fact, let X_0 be the set of all x with $\mu((x)) > 0$. If X_0 contains an isolated point of the space, the decomposition (*) is impossible. If X_0 contains no isolated point (i. e. X_0 is of the first category), the decomposition (*) of the space is possible if and only if there exists an analogous decomposition for the measure $\nu(X) = \mu(X - X_0)$ which is a Borel measure in the complementary set of X_0 and vanishes for every one-point set.