La suite $\{f_n^{(1)}(x)\}$ étant évidemment encore asymptotiquement-statistiquement convergente, extrayons-en une suite $\{f_n^{(2)}(x)\}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty}|\underset{x}{E}[|f_n^2(x)-f(x)|>1/2]|=0.$$

En répétant ce procédé infiniment et en appliquant la méthode de Cantor nous parvenons à la suite $\{f_n^{(n)}(x)\}$ qui converge asymptotiquement vers $f(x)$.

Soit à présent $\boldsymbol{M}$ une famille satisfaisant aux hypothèses du théorème 2. Ainsi, à chaque point $x\epsilon\langle 0,1\rangle$ correspond, d'une façon biunivoque, un ensemble $Z(x)\epsilon\boldsymbol{M}$, et on peut définir une suite $\{f_n(x)\}$ en posant $f_n(x)=1$ ou 0 suivant que $n\epsilon Z(x)$ ou non. Les fonctions $f_n(x)$ ne sont pas toutes mesurables au sens de Lebesgue. En effet, la famille $\boldsymbol{M}$ possédant la propriété (i), la suite $\{f_n(x)\}$ converge statistiquement vers la fonction égale identiquement à 1. Si les $f_n(x)$ étaient toutes mesurables L, on aurait en vertu du lemme 2 une sous-suite $\{f_{k_n}(x)\}$ convergente presque partout vers 1. Grâce au théorème d'Egoroff cette convergence serait uniforme dans un ensemble de mesure positive, donc dans un ensemble indénombrable. Soit E cet ensemble. A partir d'un indice n suffisamment élevé nous aurions donc $f_{k_n}(x)=1$, c'est-à-dire $k_n\epsilon Z(x)$, pour tout $x\epsilon E$. Le produit $\prod_{x\epsilon E}Z(x)$ contiendrait alors une infinité de nombres naturels, ce qui est impossible, la famille $\boldsymbol{M}$ jouissant de la propriété (ii).

Puisque ni la démonstration du théorème de Steinhaus, ni le raisonnement ci-dessus n'exigent l'axiome du choix, le théorème 2 se trouve démontré.

Państwowy Instytut Matematyczny
Institut Mathématique de l'État

SUR CERTAINES CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES POUR QU'UNE FONCTION ANALYTIQUE SOIT UNIVALENTE

PAR

W. WOLIBNER (WROCŁAW)

La méthode la plus simple d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k x^k,\quad a_1=1,$$

holomorphe à l'intérieur du cercle $|x|<1$, soit dans ce cercle univalente, est d'envisager la fonction de deux variables

$$\Phi(x,y)=\frac{x-y}{\varphi(x)-\varphi(y)}=\frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x^{k-1}+x^{k-2}y+\ldots+y^{k-1})}=\sum d_{nm}x^n y^m,$$

où Σ s'étend à toutes les paires non ordonnées de nombres entiers non négatifs n, m. L'univalence de $\varphi(x)$ pour $|x|<1$ équivaut à l'holomorphie de $\Phi(x,y)$ pour $|x|<1$, $|y|<1$; la condition nécessaire et suffisante pour cette holomorphie est

$$\overline{\lim_{n+m\to\infty}}\sqrt[n+m]{|d_{nm}|}\leqslant 1.$$

Un calcul élémentaire donne

$$d_{nm}=\frac{(-1)^{nm+n+m}}{n!m!}|u_{ij}|\qquad(i,j=1,2,\ldots,nm+n+m),$$

où $u_{ij}=\dfrac{p!q!}{g!h!}a_{p+q-g-h}$, quand $p\geqslant g$ et $q\geqslant h$, et $u_{ij}=0$ dans le cas contraire, les entiers non négatifs p,q,g,h étant déterminés par les conditions

$$(n+1)(m+1)-i=p+(n+1)q,$$
$$(n+1)(m+1)-j=1+g+(n+1)h,$$
$$p\leqslant n,\quad g\leqslant n.$$

En se servant de ces conditions d'univalence, on peut donner par exemple à l'hypothèse bien connue de Bieberbach une forme purement arithmétique: *un de nombres complexes de la suite finie*

$$a_1=1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_K$$

satisfaisant à l'inégalité $|a_k|>k$, *on a*

$$\overline{\lim_{n+m\to\infty}}\sqrt[n+m]{\frac{|u_{ij}|}{n!m!}}>1,$$

où les u_{ij} *s'expriment par les nombres* a_k *comme ci-dessus.*

Ces conditions d'univalence pour les fonctions analytiques sont compliquées; c'est pourquoi elles ne sont pas fécondes aux applications; ainsi par exemple l'hypothèse de Bieberbach dans la forme arithmétique en question ne paraît pas plus facile à démontrer. Ce qui paraît peut-être plus intéressant, c'est que dans les cas particuliers où l'hypothèse de Bieberbach est démontrée, cette forme arithmétique nous donne un théorème de la théorie des déterminants.

Dans ce travail, je vais établir d'autres conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction $f(z)$ du type

$$(1)\qquad f(z)=z+\sum_{k=1}^{\infty}b_k z^{-k},\quad \text{quand}\quad |z|>1,$$

soit univalente pour $|x|>1$. Evidemment, les fonctions $\varphi(x)$ holomorphes quand $|x|<1$ et les fonctions du type (1) se transforment les unes dans les autres par les formules

$$f(z)=\frac{1}{\varphi(x)},\qquad z=\frac{1}{x}.$$

Il suffit donc de s'occuper d'un seul de ces deux types de fonctions.

D'après un cas particulier des généralisations du théorème de Bieberbach, dues à Biernacki[1]) et à Goluzin[2]), pour que la fonction $f(z)$ du type (1) soit univalente quand $|z|>1$, il faut que pour chaque nombre naturel n et pour chaque polynôme $W_n(x)$ de degré n l'on ait

$$(2)\qquad \sum_{k=-n}^{\infty}k|c_k|^2\leqslant 0,$$

[1]) M. Biernacki, *Sur les fonctions en moyenne multivalentes*, Bulletin de la Société Mathématique de France 70 (1946), p. 5.

[2]) G. M. Goluzin, *Über p-valente Funktionen*, Récueil Mathématique 8 (1940), p. 277-284.

où les c_k sont déterminés par la formule

$$W_n[f(z)]=\sum_{k=-n}^{\infty}c_k z^{-k},\quad \text{quand}\quad |z|>1.$$

Je vais démontrer que *cette condition est aussi suffisante.*

Il suffit évidemment de démontrer que, si la fonction $f(z)$ n'est pas univalente dans la région A_r: $|z|\geqslant r$, $r>1$, il existe un polynôme $W_n(x)$ tel que

$$(3)\qquad \sum_{k=-n}^{\infty}k|c_k|^2r^{-2k}>0.$$

Désignons par R la circonférence orientée $|z|=r$, et par C — la courbe analytique fermée de Jordan sur le plan x en laquelle R est transformée par $x=f(z)$. La courbe C divise le plan en un nombre fini des régions D_i, $i=0,1,\ldots,I$. Je désigne par $O^C(x)$ l'ordre du point x par rapport à la courbe C:

$$O^C(x)=\frac{1}{2\pi}\int_C \arg(z-x)\,dz,$$

et par O_i^C — l'ordre des points appartenant à D_i par rapport à C. La fonction $f(z)$ ayant un pôle simple à l'infini, on a $O_i^C\leqslant 1$, car le nombre $1-O^C(x)$ indique combien de fois x est admis comme valeur par $f(z)$ dans A_r. La région illimitée que je désigne par D_0, aura l'ordre $O_0^C=0$. Il existe une D_i — soit D_1 — qui est contigüe à D_0 le long d'un arc de C et qui a un ordre négatif. En effet, dans le cas contraire toutes les D_i contigües à D_0 le long des arcs auraient l'ordre 1, ce qui est impossible, car les régions D_i qui ont les ordres négatifs ou nuls doivent former une région; et, évidemment, il existe au moins une région d'ordre négatif, puisque la fonction $f(z)$ n'est pas univalente dans A_r. Je forme une courbe L simple, fermée, analytique et satisfaisant aux conditions suivantes:

1° L est tangente en un point P à l'arc de C le long duquel D_1 est contigüe à D_0,

2° outre le point P, la courbe L est contenue dans D_0,

3° outre le point P, la courbe C est contenue dans l'intérieur de L.

Je désigne par $y=\psi(x)$ la fonction analytique holomorphe à l'intérieur de L et sur L et transformant l'intérieur de L en l'intérieur du cercle $|y|<1$. La courbe C se transforme en une courbe fermée de Jordan soit G, le sens de G correspondant au sens de C. La courbe G est tangente au point $Q=\psi(P)$ à la circonférence $|y|=1$; outre le point Q elle est contenue dans l'intérieur de cette circonférence. La courbe G divise le plan y en régions V_i, $V_i=\psi(D_i)$, $i=1,2,\dots,I$ et une région illimitée. En désignant par O_i^G l'ordre de V_i par rapport à G, on a $O_i^G=O_i^C$. Je désigne par G_i la frontière de V_i pourvue du sens positif, et par H et H_i — les courbes fermées de Jordan sur le plan t qui correspondent aux courbes G et G_i dans la transformation $t=y^m$, m étant un nombre naturel.

Soit $\mathfrak{R}(z)$ et $\mathfrak{J}(z)$ la partie réelle et imaginaire de z. On a

$$-\int_H \mathfrak{J}(t)\,d\mathfrak{R}(t)=\iint_\infty O^H(t)\,d\sigma_t=\sum_{i=1}^{I} O_i^G \iint_\infty O^{H_i}(t)\,d\sigma_t=$$

$$=\sum_{i=1}^{I} O_i^G \iint_{V_i}\left|\frac{dt}{dy}\right|^2 d\sigma_y=\sum_{i=1}^{I} O_i^C \iint_{V_i} m^2|y|^{2(m-1)}\,d\sigma_y.$$

Il existe des nombres $\varrho_1<\varrho_2<\varrho_3$ et $\vartheta_1<\vartheta_2$ tels que V_i, $i=2,3,\dots,I$, sont contenues dans le cercle $|y|\leqslant\varrho_1$ et que V_1 contient la région $\varrho_2\leqslant|y|\leqslant\varrho_3$, $\vartheta_1\leqslant\arg y\leqslant\vartheta_2$, car c'est seulement V_1 qui touche à la circonférence $|y|=1$. On a donc

$$\sum_{i=2}^{I} O_i^C \iint_{V_i} m^2|y|^{2(m-1)}\,d\sigma_y\leqslant m\pi\sum_{i=2}^{I}|O_i^C|\varrho_1^{2m},$$

$$\iint_{V_1} m^2|y|^{2(m-1)}\,d\sigma_y\geqslant\frac{m}{2}(\vartheta_2-\vartheta_1)(\varrho_3^{2m}-\varrho_2^{2m}).$$

Comme $O_1^C\leqslant-1$, on a

$$-\int_H \mathfrak{J}(t)\,d\mathfrak{R}(t)\leqslant-\frac{m}{2}(\vartheta_2-\vartheta_1)\varrho_3^{2m}\left[1-\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_3}\right)^{2m}-\frac{2\pi\sum_{i=2}^{I}|O_i^C|}{\vartheta_2-\vartheta_1}\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_3}\right)^{2m}\right],$$

d'où il résulte que pour un m suffisamment grand on aura

$$-\int_H \mathfrak{J}(t)\,d\mathfrak{R}(t)<0.$$

On peut approcher la fonction $[\psi(x)]^m$, holomorphe à l'intérieur de L et sur L, par un polynôme $W_n(x)$ de façon que

$$-\int_R \mathfrak{J}\{W_n[f(z)]\}\,d\mathfrak{R}\{W_n[f(z)]\}<0.$$

Le polynôme $W_n(x)$ satisfait à (3), car[3])

$$\int_R \mathfrak{J}\{W_n[f(z)]\}\,d\mathfrak{R}\{W_n[f(z)]\}=\pi\sum_{k=-n}^{\infty} k|c_k|^2 r^{-2k}.$$

Les conditions (2) ont la forme d'une suite d'inégalités dont les côtés gauches sont des polynômes homogènes carrés de $2n+2$ paramètres arbitraires, à savoir les parties réelles et imaginaires des coefficients du polynôme $W_n(x)$. Ces côtés gauches dépendent de tous les coefficients b_k. La suite de conditions (2) est monotone, c'est-à-dire que, une d'elles étant satisfaite, toutes les précédentes le sont de même.

Il est évident qu'*on peut remplacer la suite des conditions* (2) *par la suite* (*aussi monotone*) *des conditions*

$$\sum_{k=-n}^{n} k|c_k|^2\leqslant 0, \tag{4}$$

le côté gauche de l'inégalité (4) étant un polynôme homogène carré de $2n+2$ paramètres arbitraires, comme dans les conditions (2), et en même temps un polynôme de degré $2n$ par rapport aux parties réelles et imaginaires des coefficients $b_1, b_2, \dots, b_{2n-1}$ de $f(z)$.

Bien que moins simples, les conditions (2) ont la superiorité sur les conditions (4), que toute famille de fonctions du type (1) qui satisfont à la première des conditions (2) est normale dans A_r, $r>1$, car en posant $W_1(x)=x$, on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|b_k|^2\leqslant 1.$$

De cette propriété des conditions (2), il résulte aisément que, pour chaque $r>1$, il existe un nombre n tel que la n-ième condition (2) étant satisfaite, la fonction $f(z)$ est univalente dans A_r.

---

[3]) G. Pólya und G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I*, Berlin 1925, p. 109.