$$\operatorname*{fr}_n[|f_n(x_0)|\geqslant\varepsilon_j']=\lim\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h_i(x_0,\varepsilon_j')$$

existe pour tout j. Comme $x_0\epsilon\prod_{j=1}^{\infty}E(\varepsilon_j)$ et la fonction

$$F(\varepsilon)=\underline{\lim}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}h_i(x_0,\varepsilon)$$

étant non croissante, on conclut, d'après (3), que $\operatorname*{fr}_n[|f_n(x_0)|\geqslant\varepsilon_j']=0$ $(j=1,2,\ldots)$, d'où l'on obtient, à cause de (i), $\lim\operatorname{stat}f_n(x_0)=0$, ce qui achève la démonstration.

Państwowy Instytut Matematyczny
Institut Mathématique de l'État

SUR UNE FAMILLE SINGULIÈRE D'ENSEMBLES DE NOMBRES NATURELS

Travail collectif rédigé par S. Hartman, résumant une discussion au Groupe des Fonctions Réelles de l'Institut Mathématique de l'Etat (Wrocław)

Le théorème suivant constitue une réponse affirmative à un problème posé par Hartman:

Théorème 1. Il existe une famille $\boldsymbol{M}$ de puissance du continu d'ensembles Z de nombres naturels telle que

(i) *Pour tout $Z\epsilon\boldsymbol{M}$ la fréquence des nombres appartenant à Z dans la suite des nombres naturels*[1]) *est égale à 1.*

(ii) *$\boldsymbol{M}_1$ étant une sous-famille indénombrable quelconque de $\boldsymbol{M}$, il n'existe qu'un nombre fini de nombres appartenant à tous les $Z\epsilon\boldsymbol{M}_1$ à la fois.*

Voici la démonstration, donnée par Ryll-Nardzewski à l'aide de l'hypothèse du continu.

Soit Y_ξ $(\xi<\Omega)$ la suite transfinie de tous les ensembles infinis de nombres naturels. Nous définissons par l'induction transfinie une suite transfinie d'ensembles Z_ξ $(\xi<\Omega)$. Soit Z_0 l'ensemble de tous les nombres naturels et soit $\alpha<\Omega$. Les ensembles Z_ξ étant définis pour $\xi<\alpha$, rangeons les ensembles Y_ξ et Z_ξ $(\xi<\alpha)$ en une suite infinie (ordinaire) $\{F_n^\alpha\}$. Soit a_n^α le plus petit nombre naturel supérieur à 2^n et appartenant à F_n^α. Soit enfin A_α l'ensemble de tous les a_n^α $(n=1,2\ldots)$. Cela étant, posons $Z_\alpha=Z_0-A_\alpha$.

Soit $\boldsymbol{M}$ la famille de tous les ensembles Z_α. Il est évident qu'elle satisfait à (i). On voit aussi que pour $\xi<\alpha<\Omega$, ni Y_ξ ni Z_ξ n'est contenu dans Z_α, donc

$$\left.\begin{array}{ll}(1)\qquad & Z_\xi\neq Z_\alpha\\ (2)\qquad & Y_\xi-Z_\alpha\neq 0\end{array}\right\}\text{ pour }\xi<\alpha.$$

La relation (1) assure que la famille $\boldsymbol{M}$ est de puissance du continu. De (2) nous déduisons qu'elle jouit de la propriété (ii). En effet, si pour une sous-classe indénombrable $\boldsymbol{M}_1$ de $\boldsymbol{M}$ il y

[1]) Cf. H. Fast, *Sur la convergence statistique*, ce fascicule, p. 241-244.

avait une infinité de nombres naturels appartenant à la fois à tous les $Z_\xi \epsilon \boldsymbol{M}_1$, ces nombres constitueraient un ensemble figurant dans la suite $\{Y_\xi\}$, l'ensemble Y_β, par exemple. On aurait ainsi $Y_\beta \epsilon Z_\xi$ pour tout ξ tel que $Z_\xi \epsilon \boldsymbol{M}_1$, donc pour une infinité indénombrable de ξ, ce qui n'est possible en vertu de (2) que pour $\xi \leqslant \beta$. Par suite $\boldsymbol{M}$ est la famille demandée et le théorème 1 se trouve démontré.

Marczewski et Steinhaus en ont donné une démonstration différente sans faire l'usage explicite de l'hypothèse du continu, mais en se servant d'une autre hypothèse, à savoir:

(L) *Il existe un ensemble de puissance du continu et dont chaque sous-ensemble non-dense est au plus dénombrable*[2]).

La démonstration est basée sur le

Lemme 1. Soit E un ensemble (dit *ensemble de Lusin*) *dense dans l'intervalle $\langle a,b\rangle$, où $1 \leqslant a < b$. Il existe alors, pour tout nombre naturel k suffisamment grand, un $\gamma \epsilon E$ et un n naturel tels que $k=[\gamma^n]$ (où $[x]$ désigne la partie entière de x).*

Pour la démonstration de ce lemme il suffit de prouver que, pour tout k naturel suffisamment grand, il existe un n naturel tel que $a^n \leqslant k < b^n$. Le reste résulte immédiatement de la densité de E dans $\langle a,b\rangle$, la fonction x^n étant continue et monotone dans cet intervalle. Admettons que

$$\log k \geqslant \frac{\log b \cdot \log a}{\log b - \log a}.$$

On a alors

$$\log k \left(\frac{1}{\log a} - \frac{1}{\log b}\right) \geqslant 1.$$

Il existe donc un n naturel tel que

$$\frac{\log k}{\log b} < n \leqslant \frac{\log k}{\log a},$$

d'où on obtient en effet $a^n \leqslant k < b^n$.

Lemme 1 étant ainsi démontré, soit L l'ensemble de Lusin situé dans l'intervalle $\langle 1,2\rangle$. Définissons pour tout $\xi \epsilon L$ un ensemble Z_ξ, en supprimant dans la suite de tous les nombres naturels ceux qui sont de la forme $[\xi^n]$. On s'aperçoit tout de suite que pour $\xi' \neq \xi''$ on a $Z_{\xi'} \neq Z_{\xi''}$; par conséquent la famille $\boldsymbol{M}$ des ensembles Z_ξ est de puissance du continu. Évidemment elle jouit de la propriété (i), mais aussi de la propriété (ii), comme le montre le raisonnement suivant:

[2]) L'existence d'un tel ensemble est une simple conséquence de l'hypothèse du continu, comme l'a montré Lusin. Voir par exemple W. Sierpiński, *Hypothèse du continu*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Lwów 1934, p. 36.

Soit A un sous-ensemble indénombrable de L. L'ensemble A est donc dense dans un sous-intervalle de $\langle 1,2\rangle$. En vertu du lemme 1, il n'y a qu'un ensemble fini de nombres naturels qui ne sont pas de la forme $[\xi^n]$, où $\xi \epsilon A$. Mais ce sont exactement ceux qui figurent dans toutes les suites Z_ξ ($\xi \epsilon A$) à la fois. Comme à toute sous-famille indénombrable $\boldsymbol{M}_1$ de $\boldsymbol{M}$ correspond un sous-ensemble indénombrable de L composé d'indices ξ tels que $Z_\xi \epsilon \boldsymbol{M}_1$, la propriété (ii) se trouve établie pour la famille $\boldsymbol{M}$ et la seconde démonstration du théorème 1 est achevée.

On ne sait pas, si l'on peut démontrer ce théorème sous des hypothèses plus faibles que celle du continu ou celle (L) de Lusin. En tout cas l'axiome du choix semble indispensable dans la démonstration, vu le théorème suivant de Hartman:

Théorème 2. Toute famille $\boldsymbol{M}$ d'ensembles de nombres naturels qui est (effectivement) de puissance du continu et qui jouit des propriétés (i) *et* (ii) *engendre d'une façon effective une fonction de variable réelle non-mesurable au sens de Lebesgue.*

D'abord nous allons démontrer le

Lemme 2. Si la suite $\{f_n(x)\}$ converge statistiquement[3]) *vers $f(x)$, on peut en extraire une sous-suite convergente vers $f(x)$ presque partout (au sens ordinaire).*

Il suffit d'extraire de $\{f_n(x)\}$ une suite asymptotiquement convergente et d'y appliquer le théorème bien connu de F. Riesz. D'après un théorème de Steinhaus[4]) la suite $\{f_n(x)\}$ converge asymptotiquement-statistiquement[5]), elle contient donc une sous-suite $\{f_n^{(1)}(x)\}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} |\underset{x}{E}[|f_n^{(1)}(x) - f(x)| > 1]| = 0 \text{ [6])}.$$

[3]) l. c. [1]), Définition 4.

[4]) l. c. [1]), p. 242.

[5]) l. c. [1]), Définition 5.

[6]) l. c. [1]), Définition 5 et Remarque, p. 242.

La suite $\{f_n^{(1)}(x)\}$ étant évidemment encore asymptotiquement-statistiquement convergente, extrayons-en une suite $\{f_n^{(2)}(x)\}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty}|\underset{x}{E}[|f_n^2(x)-f(x)|>1/2]|=0.$$

En répétant ce procédé infiniment et en appliquant la méthode de Cantor nous parvenons à la suite $\{f_n^{(n)}(x)\}$ qui converge asymptotiquement vers $f(x)$.

Soit à présent $\boldsymbol{M}$ une famille satisfaisant aux hypothèses du théorème 2. Ainsi, à chaque point $x\in\langle 0,1\rangle$ correspond, d'une façon biunivoque, un ensemble $Z(x)\in\boldsymbol{M}$, et on peut définir une suite $\{f_n(x)\}$ en posant $f_n(x)=1$ ou 0 suivant que $n\in Z(x)$ ou non. Les fonctions $f_n(x)$ ne sont pas toutes mesurables au sens de Lebesgue. En effet, la famille $\boldsymbol{M}$ possédant la propriété (i), la suite $\{f_n(x)\}$ converge statistiquement vers la fonction égale identiquement à 1. Si les $f_n(x)$ étaient toutes mesurables L, on aurait en vertu du lemme 2 une sous-suite $\{f_{k_n}(x)\}$ convergente presque partout vers 1. Grâce au théorème d'Egoroff cette convergence serait uniforme dans un ensemble de mesure positive, donc dans un ensemble indénombrable. Soit E cet ensemble. A partir d'un indice n suffisamment élevé nous aurions donc $f_{k_n}(x)=1$, c'est-à-dire $k_n\in Z(x)$, pour tout $x\in E$. Le produit $\prod_{x\in E}Z(x)$ contiendrait alors une infinité de nombres naturels, ce qui est impossible, la famille $\boldsymbol{M}$ jouissant de la propriété (ii).

Puisque ni la démonstration du théorème de Steinhaus, ni le raisonnement ci-dessus n'exigent l'axiome du choix, le théorème 2 se trouve démontré.

Państwowy Instytut Matematyczny
Institut Mathématique de l'État

SUR CERTAINES CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES POUR QU'UNE FONCTION ANALYTIQUE SOIT UNIVALENTE

PAR

W. WOLIBNER (WROCŁAW)

La méthode la plus simple d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^k,\quad a_1=1,$$

holomorphe à l'intérieur du cercle $|x|<1$, soit dans ce cercle univalente, est d'envisager la fonction de deux variables

$$\Phi(x,y)=\frac{x-y}{\varphi(x)-\varphi(y)}=\frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x^{k-1}+x^{k-2}y+\ldots+y^{k-1})}=\sum d_{nm}x^ny^m,$$

où Σ s'étend à toutes les paires non ordonnées de nombres entiers non négatifs n, m. L'univalence de $\varphi(x)$ pour $|x|<1$ équivaut à l'holomorphie de $\Phi(x,y)$ pour $|x|<1$, $|y|<1$; la condition nécessaire et suffisante pour cette holomorphie est

$$\overline{\lim_{n+m\to\infty}}\sqrt[n+m]{|d_{nm}|}\leqslant 1.$$

Un calcul élémentaire donne

$$d_{nm}=\frac{(-1)^{nm+n+m}}{n!m!}|u_{ij}|\qquad(i,j=1,2,\ldots,nm+n+m),$$

où $u_{ij}=\frac{p!q!}{g!h!}a_{p+q-g-h}$, quand $p\geqslant g$ et $q\geqslant h$, et $u_{ij}=0$ dans le cas contraire, les entiers non négatifs p,q,g,h étant déterminés par les conditions

$$(n+1)(m+1)-i=p+(n+1)q,$$
$$(n+1)(m+1)-j=1+g+(n+1)h,$$
$$p\leqslant n,\qquad g\leqslant n.$$

En se servant de ces conditions d'univalence, on peut donner par exemple à l'hypothèse bien connue de Bieberbach une