These four properties show that the mapping

$$h(x)=\begin{cases} 0 & \text{if} \quad x\,\epsilon\, S-I, \\ 1 & \text{if} \quad x\,\epsilon\, I \end{cases} \tag{5.5}$$

is a homomorphism of $\boldsymbol{L}$ into $\boldsymbol{B}$, and in view of (4.3),

$$h(\alpha)=0. \tag{5.6}$$

From (5.5), (5.6) and (2.8), we have $\alpha$ non-$\epsilon E(\boldsymbol{B})$, q. e. d.

**6. Remarks.** It is easy to see that this proof can be carried out without the use of the construction of Lindenbaum and the truth-table $L$. We have introduced these notions rather in order to emphasize the algebraic method of this proof.

The axioms $(A_1)$-$(A_5)$ are not independent, but only $(A_3)$ is dependent from the others. Therefore the axioms $(A_1)$, $(A_2)$, $(A_4)$, and $(A_5)$, form an independent and complete set of postulates for the two-valued propositional calculus.

# *SUR LA CONVERGENCE STATISTIQUE**

PAR

H. FAST (WROCŁAW)

Soit $\{k_n\}$ une suite croissante de nombres naturels. Désignons par $i_n$ le nombre des termes $k_j \leqslant n$. Si la limite $\lim i_n/n$ existe nous l'appellons *fréquence* de $\{k_n\}$ dans la suite de tous les nombres naturels (ou fréquence de $\{k_n\}$, tout court). $W(x)$ étant une fonction propositionnelle et $\{a_n\}$ étant une suite, nous désignerons par $\underset{n}{\mathrm{fr}}\,[W(a_n)]$ la fréquence de la suite des nombres $n$ pour lesquels $W(a_n)$ est vérifiée.

*Définition 1.* Une suite $\{a_n\}$ de nombres réels est dite *mesurable* si $\underset{n}{\mathrm{fr}}\,[a_n<a]$ existe pour tout $a$ sauf pour les valeurs exceptionnelles qui constituent un ensemble au plus dénombrable.

*Définition 2.* Nous disons que la suite $\{a_n\}$ *converge statistiquement vers* $a$ si elle est mesurable et si, pour tout $\varepsilon>0$, on a $\underset{n}{\mathrm{fr}}\,[|a_n-a|\geqslant\varepsilon]=0$. Nous écrivons alors $\lim\mathrm{stat}\,a_n=a$.

Evidemment

(i) la condition $\lim\mathrm{stat}\,a_n=a$ équivaut à ce qu'il existe une suite $\varepsilon_j\to 0$, $\varepsilon_j>0$ telle que $\underset{n}{\mathrm{fr}}\,[|a_n-a|>\varepsilon_j]=0$ pour tout $j$,

(ii) les théorèmes élémentaires sur la somme, la différence, le produit et le quotient de deux suites convergentes sont aussi valables pour les suites statistiquement convergentes.

Nous aurons encore besoin de la proposition suivante qu'on prouve sans difficulté:

(iii) pour une suite bornée $\{a_n\}$ de nombres non négatifs, la condition $\lim\mathrm{stat}\,a_n=0$ équivaut à $\lim\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i=0$.

* La démonstration primitive du théorème de la page 242 présentée le 18 février 1949 par H. Steinhaus à la Section de Wrocław de la Société Polonaise de Mathématique (cf. ce volume, p. 73) est remplacée ici par une version simplifiée et basée sur les idées de A. Zygmund et les miennes.

Remarquons, qu'il n'est pas difficile de montrer l'équivalence entre la définition 2 et la condition suivante:

Il existe une sous-suite $\{a_{k_n}\}$ telle que la fréquence de la suite $\{k_n\}$ est égale à 1 et que $\lim a_{k_n} = a$.

*Définition 3.* Une suite de fonctions $\{f_n(x)\}$, définies dans l'intervalle $\langle 0, 1)$, est dite *mesurable* si ces fonctions sont toutes mesurables $(L)$, et si la suite (numérique) $\{f_n(x_0)\}$ est mesurable pour presque tout $x_0$.

*Définition 4.* On dit qu'une suite $\{f_n(x)\}$ de fonctions *tend statistiquement vers* $f(x)$ si elle est mesurable, et si, pour presque tout $x_0$, on a $\lim \operatorname{stat} f_n(x_0) = f(x_0)$.

H. Steinhaus se proposa d'examiner les propriétés d'une suite de fonctions $\{f_n(x)\}$ statistiquement convergente. La définition 4 et la remarque qui suit la proposition (iii) ne permettent pas de conclure qu'on puisse extraire de $\{f_n(x)\}$ une sous-suite de fonctions ayant la fréquence 1, qui convergerait presque partout (au sens ordinaire), vu que la sous-suite d'indices $k_n$, dont il est question dans la remarque, dépend ici en général de $x$. Mais on peut se demander quelle est la relation entre la convergence statistique d'une suite de fonctions et les autres espèces de convergence connues, la convergence asymptotique par exemple. Ainsi la dernière paraît plus forte que la convergence statistique. C'est une conséquence immédiate d'un théorème démontré par Steinhaus et dont nous donnons une démonstration simplifiée. Avant de formuler ce résultat, citons encore une notion de convergence qui s'y rattache et qui est due de même à Steinhaus:

*Définition 5.* Une suite $\{f_n(x)\}$ est dite *asymptotiquement-statistiquement convergente vers* $f(x)$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\lim \operatorname{stat} |\underset{x}{E}[|f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon]| = 0$ (où $|E|$ désigne la mesure de Lebesgue de $E$). Nous écrivons alors $\lim \operatorname{as} \operatorname{stat} f_n(x) = f(x)$.

Evidemment

(iv) les théorèmes sur la somme, la différence, le produit et le quotient de deux suites convergentes sont valables pour la convergence asymptotiquement-statistique.

*Théorème de Steinhaus. Pour les suites mesurables de fonctions, la convergence statistique et la convergence asymptotique-statistique sont équivalentes.*



Démonstration. 1. Supposons que

(1) $$\lim \operatorname{stat} f_n(x) = f(x).$$

D'après (ii) et (iv), on peut supposer que $f(x) \equiv 0$. Soit $\varepsilon > 0$ et
$$h_n(x) = h_n(x, \varepsilon)$$
la fonction caractéristique de l'ensemble $\underset{x}{E}[|f_n(x)| \geqslant \varepsilon]$. D'après l'hypothèse, on a pour presque tout $x$,
$$\underset{n}{\operatorname{fr}}[|f_n(x)| \geqslant \varepsilon] = 0,$$
c'est-à-dire
$$\lim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h_i(x) = 0, \quad \text{donc} \quad \lim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 h_i(x)\, dx = 0.$$
Puisque
$$\int_0^1 h_n(x)\, dx = |\underset{x}{E}[|f_n(x)| \geqslant \varepsilon]|,$$
on en déduit d'après (iii) et la définition 5 que

(2) $$\lim \operatorname{as} \operatorname{stat} f_n(x) = f(x).$$

2. Supposons (2). Soit encore $f(x) \equiv 0$. Fixons un $\varepsilon > 0$ et donnons au symbole $h_n(x, \varepsilon)$ la même signification qu'auparavant. En vertu de l'hypothèse et de (iii), on a
$$\lim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 h_i(x, \varepsilon)\, dx = 0,$$
donc, d'après le lemme de Fatou,
$$\int_0^1 \left[\underline{\lim} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h_i(x, \varepsilon)\right] dx = 0.$$
Il existe, par suite, un ensemble $E(\varepsilon)$ de mesure 1 tel que

(3) $$\underline{\lim} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h_i(x, \varepsilon) = 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in E(\varepsilon).$$

Etant donnée une suite $\varepsilon_j \to 0$, on a $|\prod_{j=1}^{\infty} E(\varepsilon_j)| = 1$. Soit $D$ l'ensemble (de mesure 1) des points $x$ où la suite numérique $\{f_n(x)\}$ est mesurable et soit $x_0 \in D \cdot \prod_{j=1}^{\infty} E(\varepsilon_j)$. Puisque $x_0 \in D$, il y a une suite $\varepsilon_j' \to 0$ telle que

$$\operatorname*{fr}_n [|f_n(x_0)| \geqslant \varepsilon_j'] = \lim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h_i(x_0, \varepsilon_j')$$

existe pour tout $j$. Comme $x_0 \epsilon \prod_{j=1}^{\infty} E(\varepsilon_j)$ et la fonction

$$F(\varepsilon) = \underline{\lim} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\infty} h_i(x_0, \varepsilon)$$

étant non croissante, on conclut, d'après (3), que $\operatorname*{fr}_n [|f_n(x_0)| \geqslant \varepsilon_j'] = 0$ $(j = 1, 2, \ldots)$, d'où l'on obtient, à cause de (i), $\lim_n \operatorname{stat} f_n(x_0) = 0$, ce qui achève la démonstration.

Państwowy Instytut Matematyczny
Institut Mathématique de l'État

## SUR UNE FAMILLE SINGULIÈRE D'ENSEMBLES DE NOMBRES NATURELS

Travail collectif rédigé par S. Hartman, résumant une discussion au Groupe des Fonctions Réelles de l'Institut Mathématique de l'Etat (Wrocław)

Le théorème suivant constitue une réponse affirmative à un problème posé par Hartman:

*Théorème 1. Il existe une famille* $\boldsymbol{M}$ *de puissance du continu d'ensembles* $Z$ *de nombres naturels telle que*

(i) *Pour tout* $Z \epsilon \boldsymbol{M}$ *la fréquence des nombres appartenant à* $Z$ *dans la suite des nombres naturels*[1]) *est égale à* 1.

(ii) $\boldsymbol{M}_1$ *étant une sous-famille indénombrable quelconque de* $\boldsymbol{M}$, *il n'existe qu'un nombre fini de nombres appartenant à tous les* $Z \epsilon \boldsymbol{M}_1$ *à la fois.*

Voici la démonstration, donnée par Ryll-Nardzewski à l'aide de l'hypothèse du continu.

Soit $Y_\xi$ $(\xi < \Omega)$ la suite transfinie de tous les ensembles infinis de nombres naturels. Nous définissons par l'induction transfinie une suite transfinie d'ensembles $Z_\xi$ $(\xi < \Omega)$. Soit $Z_0$ l'ensemble de tous les nombres naturels et soit $\alpha < \Omega$. Les ensembles $Z_\xi$ étant définis pour $\xi < \alpha$, rangeons les ensembles $Y_\xi$ et $Z_\xi$ $(\xi < \alpha)$ en une suite infinie (ordinaire) $\{F_n^\alpha\}$. Soit $a_n^\alpha$ le plus petit nombre naturel supérieur à $2^n$ et appartenant à $F_n^\alpha$. Soit enfin $A_\alpha$ l'ensemble de tous les $a_n^\alpha$ $(n = 1, 2 \ldots)$. Cela étant, posons $Z_\alpha = Z_0 - A_\alpha$.

Soit $\boldsymbol{M}$ la famille de tous les ensembles $Z_\alpha$. Il est évident qu'elle satisfait à (i). On voit aussi que pour $\xi < \alpha < \Omega$, ni $Y_\xi$ ni $Z_\xi$ n'est contenu dans $Z_\alpha$, donc

$$\left.\begin{aligned} &(1) \qquad & Z_\xi &\neq Z_\alpha \\ &(2) \qquad & Y_\xi - Z_\alpha &\neq 0 \end{aligned}\right\} \text{ pour } \xi < \alpha.$$

La relation (1) assure que la famille $\boldsymbol{M}$ est de puissance du continu. De (2) nous déduisons qu'elle jouit de la propriété (ii). En effet, si pour une sous-classe indénombrable $\boldsymbol{M}_1$ de $\boldsymbol{M}$ il y

[1]) Cf. H. Fast, *Sur la convergence statistique*, ce fascicule, p. 241-244.