SUR LES CONGRUENCES ET LES PROPRIÉTÉS POSITIVES D'ALGÈBRES ABSTRAITES

PAR

E. MARCZEWSKI (WROCŁAW)

1. Relation d'équivalence dans un ensemble abstrait. Admettons les notations suivantes pour la méthode bien connue d'abstraction. X étant un ensemble arbitraire, $\overset{*}{=}$ une relation d'équivalence (c'est-à-dire une relation réflexive, symétrique et transitive) dans X et $x \in X$, désignons par x^* l'ensemble de tous les $z \in X$ tels que $x \overset{*}{=} z$. Evidemment les ensembles x^* et y^* sont identiques ou disjoints suivant que $x \overset{*}{=} y$ ou non. L'ensemble de tous les x^*, où $x \in X$, sera désigné par X^*.

Notons deux cas triviaux:

(1.1) On n'a $x \overset{*}{=} y$ que si $x = y$: la relation $\overset{*}{=}$ est celle d'identité. On a alors $x^* = (x)$ pour tout $x \in X$, la transformation $\varphi(x) = x^*$ est donc biunivoque et l'ensemble X^* est équipotent à X.

(1.2) On a $x \overset{*}{=} y$ pour tout couple $x, y \in X$. Donc $x^* = X$ pour tout $x \in X$ et, par conséquent, $X^* = (X)$. L'ensemble X^* est donc composé d'un seul élément.

2. Congruence dans une algèbre abstraite. Soit $\mathfrak{X} = (X; \alpha, \beta, \ldots, \varkappa)$ une *algèbre*, c'est-à-dire un système composé d'un ensemble X et d'un nombre fini d'opérations (dites *primitives*)

$$\alpha(x_1, \ldots, x_a), \ldots, \varkappa(x_1, \ldots, x_k),$$

chacune d'elles étant une fonction d'un nombre fini de variables parcourant X et dont les valeurs appartiennent à X. Une relation d'équivalence $\overset{*}{=}$ dans X s'appelle *congruence* [1]) dans $\mathfrak{X}$ lorsqu'elle est invariante par rapport aux opérations primitives, c'est-à-dire lorsque les relations $x_i \overset{*}{=} y_i$ entraînent

$$\alpha(x_1, \ldots, x_a) \overset{*}{=} \alpha(y_1, \ldots, y_a)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varkappa(x_1, \ldots, x_k) \overset{*}{=} \varkappa(y_1, \ldots, y_k).$$

Les relations d'équivalence (1.1) et (1.2) sont des congruences (dites *triviales*) dans chaque algèbre. Les congruences au sens de la Théorie des nombres dans le corps des nombres entiers, la congruence modulo un idéal bilatère dans un anneau, la relation $xy^{-1} \in H$ dans un groupe abélien G avec un sous-groupe H sont aussi des congruences dans le sens précisé ci-dessus [2]).

Si $\overset{*}{=}$ est une congruence dans $\mathfrak{X}$, on construit une algèbre nouvelle $\mathfrak{X}^*$, en définissant les opérations primitives $\alpha, \ldots, \varkappa$ dans X^* comme suit:

$$\alpha(x_1^*, \ldots, x_a^*) = [\alpha(x_1, \ldots, x_a)]^*$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varkappa(x_1^*, \ldots, x_k^*) = [\varkappa(x_1, \ldots, x_k)]^*.$$

Cette définition est univoque grâce à l'invariance de la congruence par rapport aux opérations primitives. Nous posons $\mathfrak{X}^* = (X^*; \alpha, \ldots, \varkappa)$.

Nous appelons $\mathfrak{X}^*$ *le résultat de la division* ou *le quotient de* $\mathfrak{X}$ *par la congruence* $\overset{*}{=}$.

Cette notion est dans un certain sens équivalente à celle d'*homomorphisme* [3]).

3. Problème et exemples. Il s'impose le problème *quelles propriétés des algèbres sont invariantes par rapport à la division par les congruences* (*invariantes*, tout court). Une vérification facile suffit pour montrer que la commutativité et l'associativité d'une opération ainsi que la distributivité d'une opération par rapport à une autre sont invariantes [4]). Mais la condition exigeant que

(3.1) *X contienne deux éléments au moins*

n'est pas invariante: à savoir, elle n'est pas invariante par rapport à la congruence triviale (1.2).

---

[1]) Birkhoff-MacLane [3], p. 162. Cf. aussi une autre terminologie de Bourbaki [4], p. 44.

[2]) Cf. par exemple Bourbaki [4], p. 46, 70 et 124.

[3]) Cf. par exemple Bourbaki [4], p. 49 et Birkhoff [1], p. viii.

[4]) Cf. Birkhoff [2].

Considérons une algèbre $\mathfrak{X}=(X;\alpha)$, où α est une fonction d'une variable. Nous allons montrer que la propriété

(3.2) *α admet chaque valeur une fois au plus,*

ainsi que la propriété

(3.3) *α est une transformation biunivoque de X en soi*

ne sont pas invariantes. Posons à cet effet: X= ensemble des nombres entiers, $\alpha(j)=j+1$, et définissons la relation $\stackrel{*}{=}$ comme suit:

$$i\stackrel{*}{=}j \quad \text{si} \quad i=j \text{ ou simultanément } i>0 \text{ et } j>0.$$

La relation $\stackrel{*}{=}$ est évidemment une équivalence invariante par rapport à α. On a $0^*=(0)$ et $1^*=(1,2,3,\ldots)=2^*$. L'opération α est une transformation biunivoque de X en X, mais elle ne l'est pas dans X^*: à savoir $\alpha(0^*)=1^*=2^*=\alpha(1^*)$, tandis que $0^*\neq 1^*$.

Le quotient d'un anneau A par une congruence est aussi un anneau A^*, mais il se peut que

(3.4) *A ne possède de diviseurs non nuls de l'élément nul*

et que l'anneau A^* les possède. Il suffit par exemple de considérer l'anneau des nombres entiers et la congruence modulo 6. On a alors $2\cdot 3\stackrel{*}{=}0$, donc $2^*\cdot 3^*=0^*$.

Je dois à V. Kořinek cet exemple et l'idée que, parlant approximativement, c'est *la négation* dans l'énoncé d'une propriété qui peut impliquer la non-invariance. Nous préciserons cette idée plus loin.

4. Opérations élémentaires. Soit $\mathfrak{X}=(X;\alpha,\ldots,\varkappa)$ une algèbre. Nous appelons *élémentaires* les opérations appartenant à la plus petite classe E contenant les opérations primitives, l'opération $\varphi(x)=x$, et qui est close par rapport aux permutations de variables, à l'identification de variables (c'est-à-dire si l'opération $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ appartient à E, l'opération ψ définie par l'égalité $\psi(x_1,\ldots,x_{n-1})=\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1},x_{n-1})$ appartient aussi à E) à l'annexion d'une nouvelle variable (c'est-à-dire si l'opération $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ appartient à E, l'opération ψ définie par l'égalité

$$\psi(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})=\varphi(x_1,\ldots,x_n)$$

appartient aussi à E) et à la superposition.

Soit $\stackrel{*}{=}$ une congruence dans $\mathfrak{X}$. Les opérations primitives étant définies dans $\mathfrak{X}$ et dans $\mathfrak{X}^*$, les opérations élémentaires le sont aussi.

Lemme. Pour chaque opération élémentaire $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ on a toujours

$$(*)\qquad [\varphi(x_1,\ldots,x_n)]^*=\varphi(x_1^*,\ldots,x_n^*).$$

La relation (*) pour chaque φ primitive subsiste par la définition des opérations primitives dans $\mathfrak{X}^*$. Evidemment, elle subsiste aussi pour l'opération $\varphi(x)=x$. Il reste donc à démontrer que les permutations, l'identification et l'annexion des variables dans les opérations satisfaisant à la condition (*) et la superposition de celles-ci conduisent aux opérations ayant la même propriété. Cela ne présente aucune difficulté. Voici, par exemple, la démonstration pour la superposition. Soient donc $\varphi(x_1,\ldots,x_m)$ et $\psi(x_1,\ldots,x_n)$ deux opérations satisfaisant à (*) et soit χ définie par l'égalité

$$\chi(x_1,\ldots,x_{m+n-1})=\varphi[x_1,\ldots,x_{m-1},\psi(x_m,\ldots,x_{m+n-1})].$$

On a donc

$$\begin{aligned}[\chi(x_1,\ldots,x_{m+n-1})]^* &= \{\varphi[x_1,\ldots,x_{n-1},\psi(x_m,\ldots,x_{m+n-1})]\}^*= \\ &=\varphi\{x_1^*,\ldots,x_{m-1}^*,[\psi(x_m,\ldots,x_{m+n-1})]^*\}= \\ &=\varphi[x_1^*,\ldots,x_{m-1}^*,\ \psi(x_m^*,\ldots,x_{m+n-1}^*)]= \\ &=\chi(x_1^*,\ldots,x_{m+n-1}^*).\end{aligned}$$

5. Fonctions propositionnelles positives et leur invariance. Appelons *équation élémentaire* toute équation

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n)=\psi(x_1,\ldots,x_n)$$

où φ et ψ sont des opérations élémentaires.

Appelons *fonction propositionnelle* (une proposition en particulier) *élémentaire positive* toute fonction propositionnelle appartenant à la plus petite classe contenant toutes les équations élémentaires et close par rapport à l'addition et à la multiplication logique, ainsi qu'à l'adjonction d'un quantificateur universel $\prod\limits_x$ et existentiel $\sum\limits_x$ (où $x\in X$) et l'annexion d'une nouvelle variable. En ajoutant la négation (et par conséquent l'implication et l'équivalence) on obtient toutes *les fonctions propositionnelles élémentaires.*

Considérons, comme auparavant, une congruence dans $\mathfrak{X}$. Les opérations élémentaires étant définies en même temps dans $\mathfrak{X}$ et dans $\mathfrak{X}^*$, les fonctions propositionnelles élémentaires le sont aussi. Nous dirons qu'une fonction propositionnelle élémentaire $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ est *invariante par rapport à la division par la congruence* (*invariante*, tout court) lorsque la relation $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ étant satisfaite par $x_1, \ldots, x_n \epsilon X$, elle est satisfaite par $x_1^*, \ldots, x_n^*$. Evidemment, cette notion embrasse l'invariance d'une proposition comme un cas particulier.

Théorème[5]. *Toute fonction propositionnelle élémentaire positive (en particulier toute proposition élémentaire positive) est invariante par rapport à la division par la congruence.*

Il résulte du lemme que les équations élémentaires sont invariantes. En effet, si $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \psi(x_1, \ldots, x_n)$, où φ et ψ sont des opérations élémentaires, on a

$$\varphi(x_1^*, \ldots, x_n^*) = [\varphi(x_1^*, \ldots, x_n)]^* = [\psi(x_1, \ldots, x_n)]^* = \psi(x_1^*, \ldots, x_n^*).$$

Il faut vérifier encore que les fonctions propositionnelles $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ et $\Psi(x_1, \ldots, x_n)$ étant invariantes, les fonctions propositionnelles

$$\Omega_1(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \Phi(x_1, \ldots, x_n),$$
$$\Omega_2(x_1, \ldots, x_n) = \Phi(x_1, \ldots, x_n) + \Psi(x_1, \ldots, x_n),$$
$$\Omega_3(x_1, \ldots, x_n) = \Phi(x_1, \ldots, x_n) \cdot \Psi(x_1, \ldots, x_n),$$
$$\Omega_4(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \prod_{x_n} \Phi(x_1, \ldots, x_n),$$
$$\Omega_5(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{x_n} \Phi(x_1, \ldots, x_n)$$

sont aussi invariantes.

Faisons cela explicitement pour Ω_5 par exemple. Supposons que pour un système $x_1, \ldots, x_{n-1}$ on ait $\Omega_5(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Il existe donc un $x \epsilon X$ tel que $\Phi(x_1, \ldots, x_{n-1}, x)$, d'où, Φ étant invariante, $\Phi(x_1^*, \ldots, x_{n-1}^*, x^*)$. On a donc $\Omega_5(x_1^*, \ldots, x_{n-1}^*)$.

6. Applications. Une propriété d'une algèbre s'appelle *élémentaire positive* (ou, plus généralement, *élémentaire*) lorsqu'elle peut être exprimée par une proposition élémentaire positive (ou respectivement élémentaire).

Il existe deux genres d'applications de notre théorème: à l'aide de ce dernier on peut démontrer 1° que des propriétés différentes d'algèbres *sont invariantes* parce qu'elles sont positives et

[5]) Présenté à la Société Polonaise de Mathématique, Section de Wrocław, le 14 juin 1949 (cf. ce volume, p. 158).

2° que certaines d'autres *ne sont pas positives* parce qu'elles ne sont pas invariantes.

Ainsi par exemple les propriétés d'une algèbre $\mathfrak{X}$ consistant en ce que $\mathfrak{X}$ est un groupe, un groupe abélien, un anneau, un anneau commutatif[6]), un anneau de Boole, une algèbre de Boole, une structure[7]) sont positives et par conséquent invariantes[4]) en vertu du théorème.

Evidemment, il existe des propriétés positives exprimées parfois par des propositions non positives. Ainsi par exemple les axiomes de Byrne[8]) de l'algèbre de Boole:

$$(xy' = zz') \equiv (xy = x),$$
$$(xy)z = (yz)x$$

ne soient pas positifs (à cause de l'équivalence logique $\equiv$ dans le premier axiome) quoique les axiomes que l'on admet d'habitude soient positifs.

Les propriétés considérées dans le n° 3:

$$(3.1) \qquad \sum_x \sum_y (x = y)',$$

$$(3.2) \qquad \prod_x \prod_y \{[\alpha(x) = \alpha(y)] \to (x = y)\},$$

$$(3.3) \qquad \{\prod_x \prod_y \{[\alpha(x) = \alpha(y)] \to (x = y)\}\} \cdot \prod_y \sum_x [y = \alpha(x)],$$

$$(3.4) \qquad \prod_x \prod_y \{(x \cdot y = 0) \to [(x = 0)(y = 0)]\}$$

sont exprimées ici par les propositions non positives (à cause de la négation $'$ dans (3.1) et l'implication $\to$ dans (3.2)-(3.4)). Or, *ces propriétés sont en effet non positives* en vertu du théorème car elles ne sont pas invariantes (voir n° 3).

Si nous ajoutons aux axiomes usuels de l'algèbre de Boole la condition (3.3) que X contienne deux éléments différents (comme l'a fait Huntington dans la première liste de ses axiomes[9])), nous parvenons à un système d'axiomes non invariant.

[6]) Cf. Birkhoff-MacLane [3], p. 163, exercice 5.

[7]) C'est-à-dire une algèbre satisfaisant aux axiomes L1-L4 énoncés par Birkhoff [1], p. 18.

[8]) Byrne [5]. Cf. aussi Sierpiński [8], p. 93.

[9]) Huntington [7], p. 293, VI.

7. Projection. Problème ouvert. Horn a démontré tout récemment quelques théorèmes concernant l'invariance de certaines propriétés par rapport à la multiplication cartésienne („direct union") et à l'opération inverse, c'est-à-dire à la projection. En particulier, il a démontré que les propriétés qui sont positives dans notre sens sont invariantes par rapport à la projection, en d'autres mots:

(i) *Si le produit cartésien de deux algèbres possède une propriété positive, ces algèbres la possèdent également* [10].

La projection étant un homomorphisme, ce théorème est contenu dans le nôtre.

Horn a démontré aussi un théorème qui est dans un certain sens inverse, à savoir:

(ii) *Il existe pour toute formule Φ_0 non tautologique et non positive du Calcul des propositions et pour tout système de quantificateurs $\underset{x_1}{Q_1},\dots,\underset{x_m}{Q_m}$, deux algèbres $\mathfrak{X}_1$ et $\mathfrak{X}_2$ et une proposition Ψ de la forme*

$$\underset{x_1}{Q_1},\dots,\underset{x_m}{Q_m}\,\Phi(x_1,\dots,x_m)$$

où Φ est le résultat de la substitution de certaines équations concernant $x_1,\dots,x_m$ dans la formule Φ_0, telle que Ψ est vérifiée pour le produit cartésien $\mathfrak{X}_1\times\mathfrak{X}_2$, tandis qu'elle est fausse pour $\mathfrak{X}_2$ [11].

Ryll-Nardzewski a remarqué que le théorème complètement inverse à (i) est en défaut, à savoir que les *propriétés* (3.2) *et* (3.3) *soient invariantes par rapport à la projection, quoique elles ne soient pas positives* (voir n° 6).

Le problème reste ouvert si le théorème inverse au nôtre subsiste en toute généralité, c'est-à-dire:

P 93. Une propriété élémentaire non contradictoire, invariante par rapport à la division par les congruences doit-elle être positive? [12]

8. Corps. Voici des questions qui sont des cas particuliers du **P 93.** Les axiomes usuels de corps ne sont pas positifs, car on y exige que l'ensemble des éléments différents de zéro et

[10]) Horn [6], p. 16, Theorem 1.

[11]) Horn [6], p. 19, Theorem 9.

[12]) J. Łoś signale la résolution positive de ce problème.

la multiplication forment un groupe. On suppose donc que

$$\prod_{a,b}[(a\neq 0)\rightarrow\sum_x(ax=b)]. \tag{8.1}$$

D'autre part, il n'existe pas dans un corps de congruences non triviales [13]) et par conséquent le système des axiomes de corps forment une proposition invariante. Or, J. Łoś a remarqué que les axiomes de corps se laissent formuler d'une façon positive, à savoir l'axiome (8.1) peut être évidemment exprimé comme suit:

$$\prod_{a,b}[(a=0)+\sum_x(ax=b)]$$

ou bien

$$\prod_{a,b}[(a+a=a)+\sum_x(ax=b)].$$

Voici donc un système d'axiomes positifs de corps:

$$\left|\begin{array}{ll} a+b+c=a+(b+c), & abc=a(bc),\\ a+b=b+a, & ab=ba,\\ \multicolumn{2}{c}{(a+b)c=ac+bc,}\\ \prod_{a,b}\sum_x a+x=b, & \prod_{a,b}[(a+a=a)+\sum_x(ax=b)]. \end{array}\right. \tag{8.2}$$

C. Ryll-Nardzewski a démontré encore que *si Φ est une propriété élémentaire d'un corps et si le corps composé d'un seul élément en jouit, la propriété Φ est positive.*

D'une part, Φ équivaut par hypothèse à la propriété

$$[\prod_{x,y}(x=y)]+\Phi. \tag{8.3}$$

D'autre part, Φ peut être formulé comme $\underset{x_1}{Q_1},\dots,\underset{x_n}{Q_n}\Psi$, où Ψ est le résultat de la substitution d'équations et d'inégalités élémentaires (c'est-à-dire des fonctions propositionnelles de la forme $\varphi=\psi$ et $\varphi\neq\psi$, où φ et ψ sont des operations élémentaires) dans une formule positive du Calcul des propositions. Mais on a dans les corps contenant deux éléments au moins

$$(u\neq v)\equiv\prod_x\sum_y[y(u-v)=x]. \tag{8.4}$$

[13]) En d'autres termes, tout homomorphisme d'un corps ou bien est un isomorphisme, ou bien transforme tout le corps en élément nul. Cf. par exemple Birkhoff-MacLane [3], p. 352, Theorem 3.

D'après (8.3), Ψ équivaut à

$$(8.5)\qquad [\prod_{x,y}(x=y)]+Q_{x_1}\ldots Q_{x_n}\Psi$$

et, d'après (8.4), nous pouvons remplacer dans (8.5) chaque inégalité par une fonction propositionnelle positive, et nous obtenons enfin une proposition positive.

TRAVAUX CITÉS

[1] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, New York 1948.

[2] — *On the structure of abstract algebras*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 31 (1935), p. 433-454.

[3] — and S. MacLane, *A survey of modern Algebra*, New York 1946.

[4] N. Bourbaki, *Eléments de mathématique, Algèbre*, chapitre I, Paris 1942.

[5] L. Byrne, *Two brief formulations of Boolean Algebra*, Bulletin of the American Mathematical Society 52 (1946), p. 269-272.

[6] A. Horn, *On sentences which are true of direct union of algebras*, Journal of Symbolic Logic 16 (1951), p. 14-21.

[7] E. V. Huntington, *Sets of independent postulates for the Algebra of Logic*, Transactions of the American Mathematical Society 5 (1904), p. 288-309.

[8] W. Sierpiński, *Algèbre des Ensembles*, Warszawa-Wrocław 1951.

Institut Mathématique de l'Université de Wrocław

REMARKS ON BOOLEAN ALGEBRAS

BY

M. KATĚTOV (PRAGUE)

The present note* contains an example of a Boolean algebra without proper automorphisms[1]) and a sufficient and necessary condition[2]) for a Boolean algebra to be a Hausdorff space in its interval topology[3]). The example mentioned above will be derived from the theory of the Čech compactification. If

1° S is a *completely regular space* (i. e. a Hausdorff space such that, for any closed set $M\subset S$ and any $x\in S-M$, there exists a continuous real-valued function f in S such that $f(x)=1$, $f(z)=0$ (whenever $z\in M$)), R is compact (=bicompact), $R\supset S$, $R=\overline{S}$,

2° for any bounded continuous function f in S there exists a continuous function F in R which coincides with f in S,

then R is called the *Čech compactification*[4]) of S and is denoted by βS.

Lemma 1. *If P is completely regular, βP denotes its Čech compactification, $x\in\beta P-P$, and there exist open sets $G_n\subset\beta P$ such that $x\in G_n$, $P\prod_{n=1}^{\infty}G_n=0$, then there exists no sequence of different points $x_n\in\beta P$ converging to x.*

Proof. Suppose, on the contrary, that $x_n\in\beta P$, $x_n\to x$, $x\in\beta P-P$, $x_m\neq x_n\neq x$ whenever $m\neq n$. Put

$$P_1=P+\sum_{n=1}^{\infty}(x_n)+(x).$$

* Presented to the Polish Mathematical Society, Wrocław Section, on May 19, 1950.

[1]) Cf. Birkhoff [1], p. 162, Problem 74. (Numbers in brackets refer to the list at the end of the paper).

[2]) Cf. Birkhoff [1], p. 62, Problem 23.

[3]) Birkhoff [1], p. 60.

[4]) Cf. Čech [2].