SUR UN PROBLÈME DE LA THÉORIE DES GROUPES ET SON RAPPORT À LA TOPOLOGIE

PAR

C. KURATOWSKI ET A. MOSTOWSKI (VARSOVIE)

Soit $\mathscr{X}$ un ensemble dénombrable infini (l'ensemble des entiers positifs, par exemple). Soit $\boldsymbol{E}$ la famille de tous les sous-ensembles de $\mathscr{X}$. Faisons correspondre à tout ensemble X appartenant à $\boldsymbol{E}$ un entier $\nu(X)$ de façon que les conditions suivantes (de norme et d'additivité) soient satisfaites:

(i) $\qquad \nu(\mathscr{X})=0,$

(ii) $\qquad \nu(X_1+X_2)=\nu(X_1)+\nu(X_2), \quad \text{si} \quad X_1\cdot X_2=0.$

Désignons par $\mathfrak{N}(\mathscr{X})$ la famille de toutes les fonctions ν (normées et additives). Cette famille peut être conçue comme groupe, en définissant la composition de ses éléments par l'équivalence:

$$(\nu_3=\nu_1+\nu_2)\equiv(\nu_3(X)=\nu_1(X)+\nu_2(X), \text{ quel que soit } X\in\boldsymbol{E}).$$

P 92. Le groupe $\mathfrak{N}(\mathscr{X})$ est-il isomorphe au groupe (désignons-le par $\mathscr{G}^c$) de toutes les fonctions de variable réelle à valeurs entières (l'addition des fonctions étant entendue dans le sens habituel)? S'il ne l'est pas, quelle est sa structure?

Remarques. 1⁰ Soit $\mathscr{X}$ un espace compact de puissance arbitraire (finie, $\aleph_0$ ou c). Soit $\boldsymbol{E}$ la famille de tous les sous-ensembles de $\mathscr{X}$ qui sont simultanément fermés et ouverts. Le groupe $\mathfrak{N}(\mathscr{X})$ est alors isomorphe soit au groupe $\mathscr{G}^n$ (groupe des points à coordonnées entières de l'espace n-dimensionnel), soit au groupe $\mathscr{G}^{\aleph_0}$ (de toutes les suites infinies à termes entiers), suivant que la famille des composantes de l'espace $\mathscr{X}$ est finie (formée de $n+1$ éléments) ou infinie[1]).

2⁰ Le théorème cité dans la remarque 1⁰ admet une application intéressante à la théorie des fonctions de variable complexe et à la topologie du plan.

[1]) Voir C. Kuratowski, *Topologie II*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Wrocław 1950, p. 418.

Désignons, en effet, pour tout sous-ensemble ouvert G du plan $\mathscr{S}_2$ (plan des nombres complexes augmenté du point à l'infini), par $\mathscr{P}^G$ la famille des fonctions continues, définies sur G, ayant des valeurs complexes différentes de 0. Cette famille peut être conçue comme groupe en définissant la multiplication des fonctions comme d'habitude:

$$(f_3=f_1\cdot f_2)\equiv(f_3(x)=f_1(x)\cdot f_2(x), \text{ quel que soit } x\in G).$$

Soit $\Psi(G)$ le groupe des fonctions-éléments de $\mathscr{P}^G$ qui admettent une branche continue du logarithmé (c'est-à-dire, fonctions de la forme $e^{\varphi(x)}$, où φ est une fonction continue sur G). Le groupe-facteur $\mathscr{P}^G/\Psi(G)$ est alors isomorphe au groupe $\mathfrak{N}(\mathscr{S}_2-G)$[2]).

3⁰ Désignons par $\mathfrak{N}^*(\mathscr{X})$ le groupe dont la définition s'obtient de celle du groupe $\mathfrak{N}(\mathscr{X})$ en remplaçant l'additivité finie (condition (ii)) par l'additivité dénombrable:

(iii) $\qquad \nu\left(\sum_{n=1}^{\infty}X_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(X_n), \quad \text{si } X_n\cdot X_m=0 \text{ pour } m\neq n.$

Si $\mathscr{X}$ est un ensemble dénombrable infini, $\mathscr{X}=(p_0,p_1,\ldots)$, et $\nu\in\mathfrak{N}^*(\mathscr{X})$, on n'a $\nu(p_n)\neq0$ que pour un nombre fini d'indices n. On en conclut que le groupe $\mathfrak{N}^*(\mathscr{X})$ est isomorphe au groupe $\mathscr{G}^\omega$ des suites infinies de nombres entiers, dont chacune ne contient qu'un nombre fini de termes $\neq0$.

Il suffit à ce but de faire correspondre à l'élément ν de $\mathfrak{N}^*(\mathscr{X})$ l'élément $[\nu(p_1), \nu(p_2),\ldots]$ de $\mathscr{G}^\omega$.

Il en est de même si $\mathscr{X}$ est un espace formé d'une suite infinie de composantes ouvertes et si $\boldsymbol{E}$ désigne la famille des sous-ensembles fermés-ouverts de $\mathscr{X}$ (c'est-à-dire, formés par la réunion d'un certain nombre de composantes).

On montre que, F désignant un sous-ensemble fermé de $\mathscr{S}_2$, le groupe $\mathscr{P}^F/\Psi(F)$ est isomorphe au groupe $\mathfrak{N}^*(\mathscr{S}_2-F)$[3]).

4⁰ La puissance du groupe $\mathfrak{N}(\mathscr{X})$ peut être évaluée de la façon suivante[4]). Les fonctions additives définies sur $\mathscr{X}$ (c'est-à-dire satisfaisant seulement à la condition (ii)) forment aussi un groupe,

[2]) Ibidem, p. 420.

[3]) Voir C. Kuratowski, Fundamenta Mathematicae 33 (1945), p. 348, où — par erreur — le groupe $\mathfrak{N}^*$ est confondu avec $\mathfrak{N}$.

[4]) Nous devons cette remarque à J. Łoś et C. Ryll-Nardzewski.

$\mathfrak{M}(\mathscr{X})$, dont $\mathfrak{N}(\mathscr{X})$ est un sous-groupe. Nous allons montrer que les groupes $\mathfrak{M}(\mathscr{X})$ et $\mathfrak{N}(\mathscr{X})$ sont isomorphes (pour $\overline{\overline{\mathscr{X}}}=\aleph_0$).

En effet, soit x un élément arbitraire de $\mathscr{X}$ et $\mu\,\epsilon\,\mathfrak{M}(\mathscr{X}-\{x\})$. Faisons correspondre à tout ensemble $X\subset\mathscr{X}$ l'entier $\nu(X)$ comme il suit:

$$\nu(X)=\begin{cases}\mu(X), \text{ si } x \text{ non } \epsilon\, X,\\ \mu(X-\{x\})-\mu(\mathscr{X}-\{x\}), \text{ si } x\,\epsilon\, X.\end{cases}$$

Il est aisé de voir que la correspondance $\mu\to\nu$ établit un isomorphisme entre les groupes $\mathfrak{M}(\mathscr{X}-\{x\})$ et $\mathfrak{N}(\mathscr{X})$. L'ensemble $\mathscr{X}-\{x\}$ étant de la même puissance que $\mathscr{X}$, les groupes $\mathfrak{M}(\mathscr{X})$ et $\mathfrak{M}(\mathscr{X}-\{x\})$ sont isomorphes, ce qui achève la démonstration.

Soit maintenant $\boldsymbol{P}$ un idéal premier de $\boldsymbol{E}$, c'est-à-dire une famille héréditaire et additive des sous-ensembles de $\mathscr{X}$ telle que X étant un sous-ensemble arbitraire de $\mathscr{X}$, un au moins des ensembles X, $\mathscr{X}-X$ appartient à $\boldsymbol{P}$.

La fonction

$$\mu_{\boldsymbol{P}}(X)=\begin{cases}0, \text{ si } X\,\epsilon\,\boldsymbol{P},\\ 1, \text{ si } X \text{ non } \epsilon\,\boldsymbol{P}\end{cases}$$

est évidemment additive, donc elle appartient à $\mathfrak{M}(\mathscr{X})$. Puisque $\mu_{\boldsymbol{P}}\neq\mu_{\boldsymbol{Q}}$ pour deux idéaux $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ différents l'un de l'autre, nous en concluons que la puissance de $\mathfrak{M}(\mathscr{X})$ (donc aussi de $\mathfrak{N}(\mathscr{X})$) est au moins égale à la puissance de l'ensemble $\boldsymbol{I}$ des idéaux premiers de $\boldsymbol{E}$.

D'après un théorème de Tarski[5]), $\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}=2^{\mathfrak{c}}$, donc $\overline{\overline{\mathfrak{N}(\mathscr{X})}}\geqslant 2^{\mathfrak{c}}$. D'autre part, on voit immédiatement que $\overline{\overline{\mathfrak{N}(\mathscr{X})}}\leqslant 2^{\mathfrak{c}}$, ce qui prouve que $\overline{\overline{\mathfrak{N}(\mathscr{X})}}=2^{\mathfrak{c}}$.

On montre de la même façon que $\overline{\overline{\mathfrak{N}(\mathscr{X})}}=2^{2^{\mathfrak{m}}}$ pour $\overline{\overline{\mathscr{X}}}=\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$.

5° Soit A un anneau de Boole[6]) avec l'unité 1 et avec les opérations de multiplication et d'addition (c'est-à-dire de la différence symétrique) notées par les signes $\cdot$ et $+$. Soit G un groupe abelien par rapport à l'opération $\circ$ et avec l'élément neutre z.

[5]) A. Tarski, Fundamenta Mathematicae 32 (1939), p. 62, Satz 3.19.
[6]) Cf. M. H. Stone, Transactions of the American Mathematical Society 40 (1936), p. 37.

En remplaçant dans **P 92** la famille $\boldsymbol{E}$ des sous-ensembles de $\mathscr{X}$ par A et l'ensemble des entiers par G, nous arrivons au problème plus général suivant:

Déterminer la structure du groupe $\Gamma=\mathfrak{N}_G(A)$ dont les éléments sont les fonctions ν définies sur A, prenant les valeurs de G et satisfaisant aux conditions:

$$\nu(1)=z, \qquad \nu(a_1+a_2)=\nu(a_1)\circ\nu(a_2), \qquad \text{si} \quad a_1\cdot a_2=0,$$

l'addition des fonctions étant définie par la formule

$$(*)\qquad (\nu \text{ est la somme de } \nu_1 \text{ et } \nu_2)\equiv \equiv(\nu(a)=\nu_1(a)\circ\nu_2(a) \text{ pour tout } a\,\epsilon\, A).$$