UN THÉORÈME SUR LES FAMILLES DE FONCTIONS ET SON APPLICATION AUX ESPACES TOPOLOGIQUES
(SOLUTION D'UN PROBLÈME DE R. SIKORSKI)

PAR

W. SIERPIŃSKI (VARSOVIE)

1. Le théorème qui suit implique la solution d'un problème posé par R. Sikorski (voir nº 2, p. 200) et qui sera établie au théorème 2.

Théorème 1. Etant donné un ensemble E, soit F une famille non-vide de fonctions $f(x)$ à valeurs réelles, définies pour tout $x \epsilon E$ et satisfaisant aux conditions:

(i) *l'ensemble $H_f = \underset{x \epsilon E}{E}[f(x) \neq 0]$ est de puissance $\aleph_0$ au plus,*

(ii) *si $f \epsilon F$, $g \epsilon F$ et $f \neq g$, il existe au moins un $x \epsilon E$ (dépendant de f et g) pour lequel*

$$f(x) \neq 0, \qquad g(x) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad f(x) \neq g(x).$$

Alors la famille F est de puissance $2^{\aleph_0}$ au plus.

Démonstration. Φ étant une sous-famille de F, non-vide et de puissance $2^{\aleph_0}$ au plus, nous lui ferons correspondre comme il suit une sous-famille $\varphi(\Phi)$ de F, également de puissance $2^{\aleph_0}$ au plus.

Les ensembles H_f, où $f \epsilon F$, étant au plus dénombrables par hypothèse, l'ensemble $S_\Phi = \sum_{f \epsilon \Phi} H_f$ est de puissance $2^{\aleph_0}$ au plus. Il en est donc de même de la famille de tous les sous-ensembles au plus dénombrables de S_Φ et de la famille Ψ_Φ de toutes les fonctions réelles n'admettant pas la valeur 0, définies sur des sous-ensembles au plus dénombrables de S_Φ.

Considérons une fonction $g(x) \epsilon \Psi_\Phi$ et l'ensemble au plus dénombrable $D \subset S_\Phi$ sur lequel elle est définie. S'il existe des fonctions $f \epsilon F$ telles que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \epsilon D$, choisissons-en une quelconque et désignons-la par f_g. Soit $\varphi(\Phi)$ la famille composée de toutes les fonctions f_g ainsi choisies pour $g \epsilon \Psi_\Phi$ et de toutes les fonctions $f \epsilon \Phi$. La famille $\varphi(\Phi)$ est évidemment de puissance $2^{\aleph_0}$ au plus.

Désignons à présent par f_0 une fonction quelconque $f \epsilon F$ et posons

$$F_0 = \{f_0\}.$$

Les familles F_ξ de puissance $2^{\aleph_0}$ au plus étant supposées définies pour tout nombre ordinal $\xi < \alpha < \Omega$, posons

$$F_\alpha = \begin{cases} \varphi(F_\beta) & \text{si} \quad \alpha = \beta + 1, \\ \sum_{\xi < \alpha} F_\xi & \text{si} \quad \alpha = \lim \xi. \end{cases}$$

Les familles F_α de puissance $2^{\aleph_0}$ au plus se trouvent ainsi définies par l'induction transfinie pour $0 \leqslant \alpha < \Omega$, et l'on a

$$F_{\alpha_1} \subset F_{\alpha_2} \quad \text{pour} \quad \alpha_1 < \alpha_2. \tag{1}$$

La famille $F_\Omega = \sum_{\alpha < \Omega} F_\alpha$ est donc de puissance $\aleph_1 \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ au plus.

Reste à montrer que $F = F_\Omega$. Supposons le contraire: il existe donc une fonction $f \epsilon F - F_\Omega$. La définition de S_Φ implique, en vertu de (1), que $S_{F_\xi} \subset S_{F_\alpha}$ pour $\xi < \alpha$. En vertu de (i), il existe un $\lambda < \Omega$ tel que

$$H_f \sum_{\alpha < \Omega} S_{F_\alpha} \subset S_{F_\lambda}. \tag{2}$$

L'ensemble $H_f S_{F_\lambda}$ étant un sous-ensemble au plus dénombrable de S_{F_λ}, la définition de Ψ_{F_λ} implique l'existence d'une fonction $g \epsilon \Psi_{F_\lambda}$ définie sur l'ensemble $H_f S_{F_\lambda}$ et telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \epsilon H_f S_{F_\lambda}$. Il en résulte l'existence d'une fonction f_g (qui peut d'ailleurs être distincte de la fonction f) telle que

$$f_g(x) = f(x) \quad \text{pour tout} \quad x \epsilon H_f S_{F_\lambda}. \tag{3}$$

Comme $f_g \epsilon \varphi(F_\lambda) = F_{\lambda+1}$ et $f \epsilon F - F_\Omega \subset F - F_{\lambda+1}$, on a $f \neq f_g$. Il existerait donc un $a \epsilon H_f H_{f_g} \subset S_{F_{\lambda+1}}$ tel que $f(a) \neq f_g(a)$, d'où $a \operatorname{non} \epsilon H_f S_{F_\lambda}$ en vertu de (3). Mais en raison de (2), c'est impossible, puisque $a \epsilon H_f S_{F_{\lambda+1}}$.

Ainsi $F = F_\Omega$ et comme $\overline{\overline{F}}_\Omega \leqslant 2^{\aleph_0}$, on a $\overline{\overline{F}} \leqslant 2^{\aleph_0}$, c. q. f. d.

Le théorème 1 subsiste — et sa démonstration reste essentiellement la même — en y remplaçant partout la puissance $\aleph_0$

par la puissance $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ quelconque. On n'a qu'à s'appuyer sur les propriétés suivantes des nombres cardinaux $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$, où $\alpha \geq 0$:

Si E est un ensemble de puissance $2^{\mathfrak{m}}$, la famille de tous ses sous-ensembles de puissance $\mathfrak{m}$ au plus est de puissance $2^{\mathfrak{m}}$,

$$\mathfrak{m} \cdot 2^{\mathfrak{m}} = 2^{\mathfrak{m}}, \qquad (2^{\aleph_0})^{\mathfrak{m}} = 2^{\mathfrak{m}}, \qquad \aleph_{\alpha+1} \cdot 2^{\mathfrak{m}} = 2^{\mathfrak{m}}.$$

Par contre, lorsque m est un nombre naturel et que l'on remplace dans le théorème 1 les fonctions à valeurs réelles par celles à valeurs 0, 1 et 2, en même temps que la condition (i) par celle que H_f contienne m éléments au plus, on démontre par un raisonnement analogue que la famille F est finie.

2. Soit T un espace topologique. Une classe $\boldsymbol{G}$ quelconque d'ensembles ouverts de cet espace est dite sa *base*, si tout ensemble ouvert de T est somme d'ensembles appartenant à $\boldsymbol{G}$.

$\{T_x\}$ étant une famille d'espaces topologiques avec l'indice x parcourant un ensemble E, formons le produit cartésien

$$T = \underset{x \in E}{P}\, T_x \tag{4}$$

et assignons à tout élément $p \in T$, comme *entourages* de celui-ci, les ensembles qui le contiennent et qui sont de la forme $\underset{x \in F}{P}\, U_x$, où U_x est un ensemble ouvert de l'espace T_x et n'en diffère que pour un ensemble au plus dénombrable de valeurs de x. On voit aisément que, si l'on considère $\boldsymbol{U}$ comme classe de tous les entourages, l'ensemble T devient un espace topologique. On l'appellera *σ-produit cartésien* des espaces T_x.

R. Sikorski a posé la question si, dans un σ-produit cartésien (4), où T_x est, pour chaque $x \in E$, l'espace biponctuel de Hausdorff, toute classe $\boldsymbol{K}$ d'ensembles ouverts et disjoints est nécessairement de puissance $2^{\aleph_0}$ au plus.

La réponse est affirmative. On a même le théorème plus général suivant[1]):

Théorème 2. Si chacun des espaces T_x, où $x \in E$, a une base $\boldsymbol{G}_x$ de puissance $2^{\aleph_0}$ au plus, toute classe $\boldsymbol{K}$ d'ensembles ouverts et disjoints du σ-produit cartésien (4) est aussi de puissance $2^{\aleph_0}$ au plus.

[1]) Cf. les théorèmes analogues de E. Marczewski sur les produits cartésiens d'espaces topologiques, Fundamenta Mathematicae 34 (1947), p. 127-143.

Démonstration. Soient, conformément à l'hypothèse, $G_{x,r}$ les ensembles de $\boldsymbol{G}_x$, l'indice r prenant des valeurs réelles. On peut évidemment admettre que

$$G_{x,0} = T_x. \tag{5}$$

Soit $\boldsymbol{V}_0$ la classe de tous les ensembles $\underset{x \in E}{P}\, G_{x,f(x)}$, où $f(x)$ est une fonction à valeurs réelles, définie dans E et ne différant de 0 que tout au plus pour une infinité dénombrable de valeurs de x. Tout ensemble ouvert de l'espace T est somme d'ensembles formant une sous-classe de $\boldsymbol{V}_0$. Il suffit donc de montrer que toute classe $\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{V}_0$ d'ensembles non-vides et disjoints est de puissance $2^{\aleph_0}$ au plus.

Faisons correspondre à tout ensemble $G \in \boldsymbol{K}$ une fonction f_G à valeurs réelles, définie dans E, telle que $G = \underset{x \in E}{P}\, G_{x,f_G(x)}$ et qui ne diffère de 0 que tout au plus pour une infinité dénombrable de valeurs de x. Soit $\boldsymbol{F}$ la classe de toutes les fonctions f_G où $G \in \boldsymbol{K}$.

Si $G_1 \in \boldsymbol{K}$, $G_2 \in \boldsymbol{K}$ et $G_1 \neq G_2$, on a $G_1 \cdot G_2 = 0$, c'est-à-dire

$$\underset{x \in E}{P}\, G_{x,f_{G_1}(x)} \cdot G_{x,f_{G_2}(x)} = 0,$$

d'où $G_{x,f_{G_1}(x)} \cdot G_{x,f_{G_2}(x)} = 0$ pour un $x \in E$. On a donc $f_{G_1}(x) \neq f_{G_2}(x)$ et il résulte de (5) que $f_{G_1}(x) \neq 0 \neq f_{G_2}(x)$. Ainsi, la classe $\boldsymbol{F}$ satisfait aux hypothèses du théorème 1, d'où $\overline{\overline{\boldsymbol{F}}} \leqslant 2^{\aleph_0}$. La correspondance entre $G \in \boldsymbol{K}$ et $f_G \in \boldsymbol{F}$ étant biunivoque, il vient $\overline{\overline{\boldsymbol{K}}} \leqslant 2^{\aleph_0}$, c. q. f. d.