SUR QUELQUES PROBLÈMES TOPOLOGIQUES CONCERNANT LE PROLONGEMENT DES FONCTIONS CONTINUES

PAR

C. KURATOWSKI (VARSOVIE)

I. Généralités.

Soient X et Y deux espaces métriques séparables. Envisageons la relation τ définie comme suit: $X\tau Y$ veut dire qu'à toute transformation continue f d'un sous-ensemble fermé F de X en un sous-ensemble $f(F)$ de Y, correspond une transformation continue f^* de l'espace X tout entier en sous-ensemble $f^*(X)$ de Y telle que $f^*(x)=f(x)$ pour $x\epsilon F$.

En symbole: à tout $F=\overline{F}\subset X$ et à tout $f\epsilon Y^F$ correspond un $f^*\epsilon Y^X$ tel que $f\subset f^*$.

Il s'impose d'étudier le problème: *dans quelles conditions on a la relation $X\tau Y$?*

Dans cette note [1]), je vais réunir quelques propriétés fondamentales de cette relation. J'y ajouterai quelques problèmes non résolus [2]).

Les remarques préliminaires qui suivent mettent mieux en évidence le rapport de la relation τ à plusieurs notions importantes de la Topologie.

1. La condition $X\tau Y$, quel que soit X, caractérise les *rétractes absolus* [3]).

Tels sont: l'espace euclidien E^n (à n dimensions), le cube n-dimensionnel I^n, le cube fondamental de Hilbert $I^{\aleph_0}$, l'espace $E^{\aleph_0}$ de Fréchet.

[1]) Présentée, en partie, au I[er] Congrès des Mathématiciens Hongrois à Budapest, le 1 septembre 1950.

[2]) La plupart des théorèmes, cités dans cette note, se trouvent dans ma *Topologie* II, § 48, Monografie Matematyczne, Warszawa-Wrocław 1950. Les théorèmes III, 2 et V sont publiés pour la première fois.

[3]) dans le sens de Borsuk.

2. S_n désignant la sphère $x_1^2+\ldots+x_n^2=1$, la condition $X\tau S_n$ caractérise les espaces X de *dimension* $\leqslant n$.

3. I désignant l'intervalle 01, la condition $I\tau Y$ caractérise les espaces Y *connexes par arcs*, localement et intégralement.

De façon plus générale: la condition $I^n\tau Y$ caractérise les espaces localement et intégralement *connexes en toute dimension* $<n$ [4]).

Ainsi, par exemple, en désignant par $Y=F$ l'espace composé de deux points, 0 et 1, l'identité, conçue comme transformation de F, ne se laisse pas étendre en une transformation continue de I en sous-ensemble de Y (donc I non-τY).

De façon générale, Y désignant la surface du cube I^n, il n'existe aucune fonction $f\epsilon Y^{(I^n)}$ telle que l'on ait $f(x)=x$ pour $x\epsilon Y$ (donc I^n non-τY); c'est une conséquence facile du théorème de Brouwer sur les points invariants.

4. Sous l'hypothèse que $I\tau Y$, la condition $I\tau Y^X$ caractérise les espaces X *contractiles* relativement à Y [5]).

A côté de la relation τ, on considère la relation τ_v définie comme suit: $X\tau_v Y$ signifie qu'à toute transformation $f\epsilon Y^F$, où $F=\overline{F}\subset X$, correspond une fonction $f^*\epsilon Y^G$ telle que $f\subset f^*$ G étant un *entourage* de F convenablement choisi.

Tout espace Y tel que l'on ait $X\tau_v Y$ quel que soit X, est dit, un *rétracte absolu de voisinage*. Tels sont, en particulier, tous les *polytopes* (de l'espace euclidien à n dimensions) [6]).

II. Opérations.

1. *Si $F\subset X\tau Y$, on a $F\tau Y$* [7]).
2. *Si $X\tau F_0$, $X\tau F_1$ et $X\tau F_0\cdot F_1$, on a $X\tau F_0+F_1$.*
3. *Si $X\tau F_0\cdot F_1$ et $X\tau F_0+F_1$, on a $X\tau F_0$ et $X\tau F_1$.*
4. *Si $F_0\tau Y$ et $F_1\tau Y$, on a $F_0+F_1\tau Y$.*

[4]) dans le sens de Alexander-Lefschetz.

[5]) X est dit *contractile relativement à* Y, lorsque toute fonction $f\epsilon Y^X$ est homotope à une constante (notion étudiée par Borsuk, Lusternik et Schnirelman).

[6]) La plupart des théorèmes qui suivent restent vrais, si l'on remplace τ par τ_v. Il en est ainsi, en particulier, du théorème II, 2, d'où on déduit facilement (par induction) que tout polytope est un rétracte absolu de voisinage.

[7]) Nous désignons par la lettre F (avec ou sans indice) un ensemble fermé arbitraire.

5. *Si* $F_k\tau Y$, $F_k\subset \mathrm{Int}(F_{k+1})$ *pour* $k=1,2,\dots$ *et* $X=\sum_{k=1}^{\infty} F_k$, *on a* $X\tau Y$.

6. *Si* $F_k\tau Y$ *et* $X=\left(\sum_{k=1}^{\infty}F_k\right)\tau_0 Y$, *on a* $X\tau Y$ [8].

7. *Produit cartésien. Si* $X\tau Y_n$ *pour* $n=1,2,\dots$, *on a la relation* $X\tau(Y_1\times Y_2\times\dots)$, *et réciproquement: cette relation implique que* $X\tau Y_n$, *quel que soit* n.

8. *Si* $X\tau Y$ *et* Z *est un rétracte de* Y, *on a* $X\tau Z$.

En particulier, un rétracte d'un rétracte absolu est un rétracte absolu.

III. Espace fonctionnel.

1. $T\times X\tau Y$ *entraîne* $X\tau Y^T$; $X\tau Y^T$ *entraîne* $X\tau Y$ *(pour* $T\neq 0$).

2. *Soient* T *et* X *deux espaces compacts. Si l'on a:*

(1) $X\times T\tau_0 Y$, (2) $X\supset F_1\supset F_2\supset\dots$, (3) $T\tau Y^{F_k}$, *pour* $k=1,2,\dots$,

on a alors $T\tau Y^F$, *où* $F=F_1\cdot F_2\cdot\dots$

Démonstration. Soient $U=\overline{U}\subset T$ et $f\in(Y^F)^U$. La transformation f fait donc correspondre à tout $t\in U$ une fonction $f_t\in Y^F$. Posons

$$h(x,t)=f_t(x),\quad \text{où}\quad x\in F \quad\text{et}\quad t\in U.$$

Par suite $h\in Y^{F\times U}$. Il vient d'après (1): $h\subset h^*\in Y^G$, où G est un entourage de $F\times U$ (dans $X\times T$). L'espace T étant compact, il existe un entourage H de F tel que $H\times U\subset G$. Il existe, par conséquent, d'après (2), un indice m tel que $F_m\subset H$. Posons

$$f_t^*(x)=h^*(x,t)\quad\text{pour}\quad x\in F_m \text{ et } t\in U.$$

Il vient $f^*\in(Y^{F_m})^U$. On a donc d'après (3):

$$f^*\subset f^0\in(Y^{F_m})^T$$

et en posant [9] $f_t^1=f_t^0|F$, il vient

$$f\subset f^1\in(Y^F)^T.$$

Remarque. En admettant que Y est un rétracte absolu de voisinage et en posant $T=I$, on déduit aussitôt du théorème 2 que la contractilité d'un espace compact, relative à un rétracte absolu de voisinage, est inductive [10]).

[8]) Cf. A. D. Wallace, Bulletin of the American Mathematical Society 51 (1945), p. 679.

[9]) Le symbole $f|A$, où $A\subset X$ et $f\in Y^X$, désigne la fonction partielle qui se déduit de f en restreignant la variabilité de x aux points de A.

IV. Rapports à la dimension.

1. *Si* $I^n\tau Y$ *et* $\dim X\leqslant n$, *on a* $X\tau Y$.

2. *La condition* $I^n\tau Y$ *équivaut au produit logique:*

$$(I\tau Y^{S_0})\cdot\ldots\cdot(I\tau Y^{S_{n-1}}).$$

3. *Si* $I^{n+1}\tau Y$ *et* $\dim Y\leqslant n$, Y *est un rétracte absolu.*

Voici l'esquisse de la démonstration [11]).

En vertu du théorème de Menger-Nöbeling, on peut admettre que $Y\subset S_{2n+1}$. Soit X le sphéroïde ouvert $x_1^2+\dots+x_{2n+2}^2<1$, augmenté de l'ensemble Y. En tant que sous-ensemble convexe de l'espace cartésien E^{2n+2}, X est un rétracte absolu [12]). D'après I 8, tout revient à démontrer que Y est un rétracte de X, ou encore que $X\tau Y$, donc — en vertu de 1 — que $I^{2n+2}\tau Y$.

Or, l'inégalité $\dim Y\leqslant n$ implique que $\dim(Y\times I)\leqslant n+1$, donc (d'après 1) que $Y\times I\tau Y$, puisque $I^{n+1}\tau Y$ par hypothèse.

La relation $Y\times I\tau Y$ implique que Y est localement et intégralement contractile dans soi [13]), donc [14]) que $I^k\tau Y$, quel que soit k (donc, en particulier, que $I^{2n+2}\tau Y$).

V. Invariance.

Soit Y *un rétracte absolu de voisinage. Dans le domaine des espaces* X *compacts, la relation* X *non-*τY *est un invariant des petites transformations* [15]).

Autrement dit: *à tout espace* X *tel que* X *non-*τY *correspond un* $\varepsilon>0$ *assujetti à la condition suivante: si* $z=f(x)$ *est une*

[10]) Voir, par exemple, *Topologie* II, p. 285.

[11]) Pour la démonstration, voir ibidem, p. 289.

[12]) Voir *Topologie* I, Monografie Matematyczne, Warszawa-Wrocław 1948, p. 217.

[13]) Un espace Y est dit *localement contractile dans soi*, lorsqu'à tout point $y\in Y$ et tout $\varepsilon>0$ correspond un $\eta>0$ tel que tout ensemble A, pour lequel $\delta(y+A)<\eta$, se laisse déformer en y dans la sphère de centre y et de rayon ε.

[14]) Voir, par exemple, *Topologie* II, p. 287.

[15]) Ce théorème est une généralisation du théorème bien connu de la théorie de la dimension, d'après lequel la relation $\dim X>n$ est un invariant des petites transformations. Pour en déduire celui-ci, il suffit en effet de substituer S_n à Y (conformément à I,2).

transformation continue de X *telle que* $\delta f^{-1}(z)<\varepsilon$, *quel que soit* z, *on a* $f(X)$ *non*-τY.

D'après un théorème général [16]), tout revient à démontrer que, X étant un sous-ensemble fermé du cube $I^{\aleph_0}$ de Hilbert tel que X non-τY, il existe un $\alpha>0$ pour lequel les conditions:

(1) $$g\in(I^{\aleph_0})^X,$$

(2) $$|g(x)-x|<\alpha$$

entraînent

(3) $$g(X)\text{ non-}\tau Y.$$

Nous allons déterminer le nombre α comme suit.

Désignons par Φ_F, pour $F\subset X$, l'ensemble des fonctions $f\in Y^F$ qui ne se laissent pas étendre sur X. Il existe par hypothèse un ensemble F tel que $\Phi_F\neq 0$. Soit $f\in\Phi_F$.

Y étant un rétracte absolu de voisinage, l'ensemble Φ_F est ouvert [17]). Il existe donc un $\beta>0$ tel que les conditions:

(4) $$f^*\in Y^F,$$

(5) $$|f^*-f|<\beta$$

entraînent

(6) $$f^*\in\Phi_F.$$

L'hypothèse que Y est un rétracte absolu de voisinage implique d'autre part l'existence d'une fonction $f_0\in Y^G$ telle que $f\subset f_0$ et que G est un entourage (fermé) de F (dans $I^{\aleph_0}$).

Il existe donc un $\alpha>0$ tel que les conditions:

(7) $$x\in F,\qquad x'\in I^{\aleph_0}\qquad\text{et}\qquad |x'-x|<\alpha$$

entraînent:

(8) $$x'\in G,$$

(9) $$|f_0(x')-f_0(x)|<\beta.$$

Soit g une fonction satisfaisant aux conditions (1) et (2). Il s'agit de démontrer que la condition (3) est satisfaite.

[16]) Voir, par exemple, *Topologie* II, p. 19, ou S. Eilenberg, Comptes Rendus Paris 200 (1935), p. 1003.

[17]) Théorème de Borsuk, Fundamenta Mathematicae 28 (1937), p. 106. Cf. *Topologie* II, p. 279, théorème 4.

Posons pour abréger:

$$X^*=g(X),\quad F^*=g(F)\quad\text{et}\quad f^*(x)=f_0 g(x)\qquad\text{pour}\quad x\in F.$$

D'après (2), (7) et (8), on a $F^*\subset G$, d'où la condition (4). La condition (5) se trouve aussi réalisée, car, pour $x\in F$, on a

$$|f^*(x)-f(x)|=|f_0g(x)-f_0(x)|<\beta,$$

d'après (2) et (9).

Il vient par conséquent (6).

Nous en déduirons (3), ce qui achevera la démonstration.

Supposons par impossible que $X^*\tau Y$. On a donc

$$f_0|F^*\subset f_1\in Y^{X^*}.$$

Il en résulte que $(f_0g)|F\subset f_1g\in Y^X$ et comme, par définition $f^*=(f_0g)|F$, la fonction f^* admet une extension sur X. Mais cela est incompatible avec (6).

VII. Problèmes.

P 86. La condition $A\subset X\tau Y$ entraîne-t-elle $A\tau Y$?

La réponse est positive si A est fermé (cf. II, 1).

En particulier:

P 87. $I^{\aleph_0}$ désignant le cube fondamental de Hilbert, la condition $I^{\aleph_0}\tau Y$ implique-t-elle que Y est un rétracte absolu?

La réponse est positive si Y est compact.

P 88. Soit $A\subset X$. La condition $A\tau Y$ implique-t-elle l'existence d'un ensemble G_δ, $B\subset X$ tel que $A\subset B\tau Y$? Y est supposé un rétracte absolu de voisinage.

La réponse est positive si Y est une sphère à n dimensions (cf. I, 2).

P 89. Les conditions $X\tau Y$ et $\dim X=n$ impliquent-elles que $I^n\tau Y$?

La réponse est positive si $n=1$.

Państwowy Instytut Matematyczny
Institut Mathématique de l'État