SUR UNE RELATION ENTRE LES SINGULARITÉS DES FONCTIONS ANALYTIQUES

PAR

W. WOLIBNER (WROCŁAW)

Je m'occupe dans cette note des fonctions analytiques, dont les coefficients sont donnés en valeurs d'une série entière de la variable n.

Soient $f(z)$ une fonction analytique uniforme ou une branche d'une fonction multiforme, A sa région d'existence et S la frontière de A. J'admets que $f(z)$ est holomorphe au point $z=0$ et à l'infini, ces deux points appartenant à A; j'admets aussi que $f(\infty)=0$ et que

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

dans le voisinage de 0. Il existe donc une ligne polygonale L, aboutissant à 0 et à l'infini, contenue à l'intérieur de A. Je désigne par G_L le plan de la variable complexe z, coupé par L, et je pose

$$H_L=\alpha(G_L), \quad \text{où} \quad \alpha(z)=-\frac{1}{\overline{\lg} z};$$

$\overline{\lg} z$ désignant une branche quelconque du logarithme, déterminée dans G_L. Je pose encore $K=\alpha(S)$ et je désigne par B la composante du complément de K par rapport au plan de la variable $x=\alpha(z)$, qui contient le point $x=0$. K est la frontière de B, car $\alpha(A)\subset B$.

Théorème 1. Il existe une suite b_k, $k=0,1,2,\ldots$, telle que

$$a_n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{k!}n^k, \qquad n=0,1,2,\ldots,$$

et que la fonction analytique, définie par l'élément

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k,$$

est holomorphe à l'intérieur de B.

Démonstration. Il existe une suite croissante de régions A_l $(l=1,2,\ldots)$, telle que $0\in A_l$, $A=\sum_{l=1}^{\infty} A_l$ et que la frontière S_l de A_l soit composée d'un nombre fini de polygones et contenue dans A. Je pose

$$b_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{S_l}\frac{f(z)}{z}(-\overline{\lg} z)^k dz;$$

les nombres b_k sont évidemment indépendants de l. D'après Cauchy

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{S_l}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{S_l}\frac{f(z)}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\overline{\lg} z)^k n^k}{k!}dz=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!}\frac{1}{2\pi i}\int_{S_l}\frac{f(z)(-\overline{\lg} z)^k}{z}dz=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{k!}n^k.$$

Considérons maintenant la fonction $\varphi(x)$, définie dans le voisinage du point $x=0$ par l'élément

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k=\frac{1}{2\pi i}\int_{S_l}\frac{f(z)}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(-\overline{\lg} z)^k x^k dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{S_l}\frac{f(z)dz}{z(1+x\overline{\lg} z)}.$$

Pour chaque point x de la région B, il existe un polygone S_l tel que $1+x\overline{\lg} z\neq 0$, quand $z\in S_l$. Il en résulte que $\varphi(x)$ est holomorphe à l'intérieur de B, c. q. f. d.

Soient maintenant $\varphi(x)$ une fonction analytique uniforme ou une branche d'une fonction multiforme, D sa région d'existence et F la frontière de D. J'admets que $\varphi(x)$ est holomorphe au point $x=0$ et que $\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$. Je pose

$$E=\beta(F), \quad \text{où} \quad \beta(x)=e^{-1/x},$$

et je désigne par C la composante du complément de E par rapport au plan de la variable z comprenant le point 0, ce point ne pouvant pas appartenir à E. Dans le cas où $F\subset H_L$, la composante C contient le point à l'infini et E est la frontière de C, car $\beta(Q)\subset C$, où $Q=D\cdot H_L$.

Théorème 2[1]). *La fonction analytique, définie dans le voisinage de 0 par l'élément*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad \text{où} \qquad a_n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{k!}n^k$$

(la fonction $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{k!}x^k$ *étant entière), est holomorphe à l'intérieur de C, sauf au point* $z=1$*, où elle peut avoir un pôle simple.*

Démonstration. Il existe une suite croissante de régions D_p $(p=1,2,\ldots)$, telle que $0\epsilon D_p$, $D=\sum_{p=1}^{\infty}D_p$ et que la frontière F_p de D_p est composée d'un nombre fini de polygones, et contenue dans D. Nous avons pour chaque p

$$b_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{F_p}\frac{\varphi(x)dx}{x^{k+1}}, \qquad k=1,2,\ldots, \qquad b_0=\frac{1}{2\pi i}\int_{F}\frac{\varphi(x)dx}{x}+\gamma,$$

où $\gamma=0$, quand $\varphi(x)$ n'est pas holomorphe à l'infini; dans le cas contraire, $\gamma=\varphi(\infty)$ et

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{F_p}\frac{\varphi(x)}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{n}{x}\right)^k dx+\gamma=\frac{1}{2\pi i}\int_{F_p}\frac{\varphi(x)e^{n/x}}{x}dx+\gamma.$$

Dans le voisinage de 0, nous avons

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{F_p}\frac{\varphi(x)}{x}\sum_{n=0}^{\infty}z^n e^{n/x}dx+\sum_{n=0}^{\infty}\gamma z^n=\frac{1}{2\pi i}\int_{F_p}\frac{\varphi(x)dx}{x(1-ze^{1/x})}+\frac{\gamma}{1-z}.$$

Pour chaque point z à l'intérieur de C, il existe un nombre p tel que $1-ze^{1/x}\neq 0$, quand $x\epsilon F_p$. Le théorème est ainsi démontré.

En se servant du théorème 2, on peut compléter le théorème 1 par la remarque suivante:

[1]) Quand $\varphi(x)$ est une fonction entière, $f(z)$ n'admet des autres points singuliers que le point $z=1$. Ce théorème fut énoncé par G. Faber, *Über die Fortsetzbarkeit gewisser Taylorschen Reihen*, Mathematische Annalen 57 (1903), p. 369-388, en particulier p. 374.

Si $f(z)$ n'est pas holomorphe au point $g\epsilon S$ et remplie une des deux conditions suivantes:

1° $g\neq 1$,

2° $g=1$ et $f(z)$ n'a pas un pôle simple au point g,

la fonction $\varphi(x)$ ne peut pas être holomorphe au point $h=\alpha(g)$.

Dans le cas contraire, on pourrait adjoindre un entourage du point h à la région D (si $\varphi(x)$ est multiforme, on peut toujours mener la coupure artificielle de manière à éviter h). Puisque la frontière F de D est contenue dans H_L, le point $g=\beta(h)$ appartiendrait donc à C, ce qui est impossible.