SUR UNE ÉQUATION INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLE

PAR

L. FINKELSZTEJN, J. G.-MIKUSIŃSKI ET C. RYLL-NARDZEWSKI
(WROCŁAW)

Le sujet de nos considérations est l'équation

$$\int_0^t [a(t-\tau)x_\lambda(\lambda,\tau)+b(t-\tau)x(\lambda,\tau)]\,d\tau=0, \tag{1}$$

où a et b sont deux fonctions données et x la fonction inconnue, ayant la dérivée partielle x_λ.

L'équation (1) peut être considérée comme une généralisation de certains types d'équations aux dérivées partielles. Si, par exemple, $a(t)=t^n/n!$ et $b(t)=k$ (constant), l'équation (1) devient, si on la dérive $n+1$ fois,

$$\frac{\partial x}{\partial\lambda}+k\frac{\partial^n x}{\partial t^n}=0.$$

D'autre part, l'équation (1) joue un rôle important dans la théorie des opérateurs [1]).

Supposons que a et b soient deux fonctions complexes, continues pour $0\leqslant t\leqslant+\infty$, et que a ne soit pas identiquement nulle. Supposons de plus que $x(\lambda,t)$ soit une fonction complexe possédant la dérivée partielle $x_\lambda(\lambda,t)$ continue dans le domaine $\mathscr{D}[0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0,\ 0\leqslant t<+\infty]$. Ceci posé, on a le théorème suivant:

I. *Si $x(\lambda,t)$ satisfait, dans $\mathscr{D}$, à l'équation* (1) *et si* $x(0,t)=0$ *pour* $0\leqslant t<+\infty$, *on a* $x(\lambda,t)=0$ *identiquement dans* $\mathscr{D}$.

Ce théorème est une conséquence immédiate d'un théorème de J. G.-Mikusiński sur l'unicité des solutions des équations différentielles abstraites [2]).

[1]) Cette équation revêt, dans la notation du calcul opératoire, la forme $ax'(\lambda)+bx(\lambda)=0$; voir J. G.-Mikusiński, *Sur les fondements du calcul opératoire*, Studia Mathematica 11(1950), p. 41-70, en particulier p. 56.

[2]) J. G.-Mikusiński, *Sur l'unicité de quelques équations différentielles dans les espaces abstraits*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 22 (1949), p. 157-160. En effet, il suffit d'écrire $a=\{a(t)\}$, $b=\{b(t)\}$, $x(\lambda)=\{x(\lambda,t)\}$ et de définir ensuite généralement l'addition, la multiplication et la dérivation par les formules donnés dans l'article cité, p. 160.

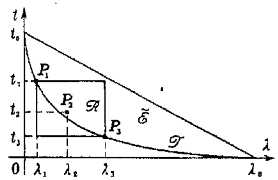
En modifiant légèrement la méthode de démonstration, on peut parvenir à un théorème plus fort.

Remplaçons le domaine $\mathscr{D}$ par le triangle

$$\mathscr{T}\left[0\leqslant\frac{\lambda}{\lambda_0}\leqslant\frac{\lambda}{\lambda_0}+\frac{t}{t_0}\leqslant 1\right]$$

et supposons que $x(\lambda,t)$ possède la dérivée $x_\lambda(\lambda,t)$ continue sur $\mathscr{T}$. Quant aux fonctions a et b, supposons qu'elles soient continues pour $0\leqslant t\leqslant t_0$ et que l'une au moins d'elles ne s'annule identiquement au voisinage de $t=0$. Ceci posé, on a le théorème suivant:

II. *Si $x(\lambda,t)$ satisfait, dans $\mathscr{T}$ à l'équation* (1) *et si* $x(0,t)=0$ *pour* $0\leqslant t\leqslant t_0$, *on a* $x(\lambda,t)=0$ *identiquement sur le triangle* $\mathscr{T}$.



Démonstration. Supposons, par contre, qu'il existe un ensemble non vide $\mathscr{E}\subset\mathscr{T}$ de points, où $x(\lambda,t)\neq 0$, et désignons par $\tilde{\mathscr{E}}$ le moindre ensemble convexe fermé, contenant l'ensemble $\mathscr{E}$ et les deux points $(0,t_0)$ et $(\lambda_0,0)$.

Il existe alors trois points $P_1(\lambda_1,t_1)$, $P_2(\lambda_2,t_2)$ et $P_3(\lambda_3,t_3)$ dont P_1 et P_3 sont situés sur la frontière de $\tilde{\mathscr{E}}$, $P_2\in\tilde{\mathscr{E}}$, et tels que

$$\lambda_2<\frac{\lambda_1+\lambda_3}{2},\qquad t_2<\frac{t_1+t_3}{2}\qquad\text{et}\qquad \frac{\lambda_3}{\lambda_0}+\frac{t_1}{t_0}\leqslant 1;$$

il résulte de la dernière inégalité que le rectangle $\mathscr{R}$ à côtés parallèles aux axes des λ et des t et dont deux sommets coïncident avec P_1 et P_3, est contenu dans $\mathscr{T}$.

En posant $t=t_3+u$, $\tau=t_3+\omega$ et $x(\lambda,t)=y(\lambda,u)$, il vient de (1)

$$\int_0^u [a(u-\omega)y_\lambda(\lambda,\omega)+b(u-\omega)y(\lambda,\omega)]\,d\omega=0 \tag{2}$$

pour $\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_3$, $0\leqslant u\leqslant t_1-t_3$.

En utilisant la notation $f(u)*g(u)=\int_0^u f(u-\omega)g(\omega)\,d\omega$, l'égalité (2) devient

(3) $$a(u)*y_\lambda(\lambda,u)+b(u)*y(\lambda,u)=0.$$

Fixons μ arbitrairement dans l'intervalle $\lambda_1<\mu<\lambda_3$ et posons
$$z(\lambda,u)=y(\lambda,u)*y(\lambda_1+\mu-\lambda,u)$$
dans le rectangle $\mathscr{U}\,[\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\mu,\ 0\leqslant u\leqslant t_1-t_3]$. On a
$$z_\lambda(\lambda,u)=y_\lambda(\lambda,u)*y(\lambda_1+\mu-\lambda,u)-y(\lambda,u)*y_\lambda(\lambda_1+\mu-\lambda,u).$$

En tenant compte de (3), on vérifie facilement que
$$a(u)*z_\lambda(\lambda,u)=0 \quad \text{et} \quad b(u)*z_\lambda(\lambda,u)=0.$$

Si l'une au moins des fonctions a et b n'est pas nulle identiquement au voisinage de 0, il s'ensuit, en vertu du théorème de Titchmarsh[8]) sur le produit de composition, que $z_\lambda(\lambda,u)=0$ dans $\mathscr{U}$. Donc $z(\lambda,u)$ est constante par rapport à u. Or, on a $y(\lambda_1,u)=0$ pour $0\leqslant u\leqslant t_1-t_3$, donc
$$z(\lambda_1,u)=y(\lambda_1,u)*y(\mu,u)=0 \quad \text{pour} \quad 0\leqslant u\leqslant t_1-t_3$$
et, par conséquent, $z(\lambda,u)=0$ dans $\mathscr{U}$. En particulier on a
$$z\left(\frac{\lambda_1+\mu}{2},u\right)=y\left(\frac{\lambda_1+\mu}{2},u\right)*y\left(\frac{\lambda_1+\mu}{2},u\right)=0 \quad \text{pour} \quad 0\leqslant u\leqslant t_1-t_3.$$

En appliquant le théorème de Titchmarsh encore une fois, il vient
$$y\left(\frac{\lambda_1+\mu}{2},u\right)=0 \quad \text{pour} \quad 0\leqslant u\leqslant t_1-t_3.$$

Puisque μ peut être fixé arbitrairement dans l'intervalle $\lambda_1\leqslant\mu\leqslant\lambda_3$, on a $y(\lambda,u)=0$ pour $\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_3$, $0\leqslant u\leqslant t_1-t_3$ et, par suite, $x(\lambda,t)=0$ dans le rectangle $\mathscr{R}_1\,[\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2,\ t_3\leqslant t\leqslant t_1]$. Or, ceci est impossible, car le point P_2 appartient à $\mathscr{R}_1$. Cette contradiction prouve la validité du théorème.

On voit facilement que le théorème I est une conséquence du théorème II.

Remarquons encore qu'il est impossible de remplacer, dans le théorème II, le triangle $\mathscr{T}$ par un domaine plus grand, ayant la même partie de la frontière commune avec les axes des λ et des t. Ainsi par exemple, la fonction

[8]) E. C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of Fourier Integrals*, second edition, Oxford 1948, p. 324-325, Theorem 151.

$$x(\lambda,t)=\begin{cases} 0 & \text{dans } \mathscr{T}, \\ \left(\dfrac{\lambda}{\lambda_0}+\dfrac{t}{t_0}-1\right)^2 & \text{ailleurs}\end{cases}$$

satisfait à l'équation
$$\int_0^t [\lambda_0\cdot(t-\tau)\,x_\lambda(\lambda,\tau)-t_0\cdot x(\lambda,\tau)]\,d\tau=0$$

sur le rectangle $[0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0,\ 0\leqslant t\leqslant t_0]$ tout entier, tandis qu'elle n'est nulle que sur le triangle $\mathscr{T}$.