SUR LES ESPACES À PARALLÉLISME ABSOLU DOUÉS D'UNE CONNEXION SEMISYMÉTRIQUE

PAR

W. ŚLEBODZIŃSKI (WROCŁAW)

1. Soient x^i les coordonnées d'un point arbitraire M dans un espace à parallélisme absolu [1]). Les équations de structure de cet espace peuvent être écrites comme il suit

$$(1)\qquad d\omega^h = \frac{1}{2}\sum_{rs} S_{rs}^{\cdot\cdot h}\,\omega^r\omega^s, \qquad S_{rs}^{\cdot\cdot h}+S_{sr}^{\cdot\cdot h}=0,$$

les symboles ω^h désignant des formes différentielles linéaires aux variables x^i et les symboles $S_{rs}^{\cdot\cdot h}$ — les composantes du tenseur de torsion. La connexion de l'espace étant, par hypothèse, semi-symétrique, on a

$$(2)\qquad S_{rs}^{\cdot\cdot h}=S_rA_s^h-S_sA_r^h,\qquad A_i^h=\begin{cases}1 \text{ pour } h=i,\\ 0 \text{ pour } h\neq i.\end{cases}$$

Les équations (1) se réduisent dans ce cas aux suivantes

$$(3)\qquad d\omega^h=\omega\,\omega^h,$$

où l'on a posé

$$(4)\qquad \omega=\sum_r S_r\omega^r.$$

2. Posons maintenant le problème suivant: étant données n fonctions S_i des variables x^h, déterminer l'espace à parallélisme absolu dont le tenseur de torsion satisfait aux équations (2).

Ce problème revient à résoudre de la façon la plus générale les équations différentielles (3), les formes ω^h étant des inconnues.

[1]) Dans tout ce qui suit les indices latins parcourent les valeurs de 1 jusqu'à n. Nous ne faisons pas usage de la convention d'après laquelle on supprime le symbole de sommation devant un terme qui contient un indice deux fois.

Or, le système (3) nous apprend qu'en vertu du théorème de Frobenius chacune des équations $\omega^h=0$ doit être complètement intégrable; on peut donc poser

$$(5)\qquad \omega^h=a_h\,du^h,$$

a_h et u^h étant des fonctions des variables x^i. Comme les formes cherchées doivent être indépendantes, les fonctions u^h doivent l'être aussi et on doit avoir $a_h\neq 0$. En remplaçant dans les équations (3) les inconnues ω^h par les expressions (5), on trouve

$$(da_h-a_h\sum_r S_ra_r\,du^r)\,du^h=0 \quad \text{ou}\quad (d\log a_h-\sum_r S_ra_r\,du^r)\,du^h=0.$$

Les différentielles du^h étant indépendantes, on en déduit les équations

$$d\log a_h=\sum_r S_ra_r\,du^r+\alpha_h\,du^h,$$

les coëfficients α_h étant des fonctions arbitraires des variables x^i. On en déduit les équations

$$(6)\qquad \frac{\partial\log a_h}{\partial u^i}=S_ia_i \qquad (h\neq i),$$

d'où

$$\frac{\partial\log a_h}{\partial u^i}=\frac{\partial\log a_k}{\partial u^i}\qquad (h,k\neq i).$$

Ceci montre que l'on peut écrire

$$a_h/a_k=U_{hk},$$

le symbole U_{hk} désignant une fonction qui ne dépend que de deux arguments, u^h et u^k. Il en résulte facilement que l'on peut poser

$$a_h=-U_h/\Phi,$$

U_h désignant une fonction de la seule variable u^h et Φ une fonction arbitraire des arguments u^i. En tenant compte de la dernière relation, la formule (5) devient

$$\omega^h=-U_h\,du^h/\Phi.$$

On peut évidemment supposer que $U_h=1$; on aura alors

$$(7)\qquad \omega^h=-du^h/\Phi$$

et $a_h = -1/\Phi$. L'équation (6) devient maintenant

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u^i} = S_i,$$

ce qui peut être condensé dans la relation

(8) $$d\Phi = \sum_i S_i du^i.$$

Dans la suite, nous allons distinguer trois cas différents.

3. Envisageons en premier lieu le cas, où *les composantes S_i sont des fonctions indépendantes*. On peut donc les introduire dans le système (3) comme variables indépendantes au lieu des variables x^i. L'équation (8) peut alors être présentée sous la forme

$$d\Phi = \sum_{ir} S_i \frac{\partial u^i}{\partial S_r} dS_r.$$

Il en résulte que

(9) $$\frac{\partial \Phi}{\partial S_r} = \sum_i S_i \frac{\partial u^i}{\partial S_r},$$

et par conséquent

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial S_r \partial S_s} = \sum_i S_i \frac{\partial^2 u^i}{\partial S_r \partial S_s} + \frac{\partial u^s}{\partial S_r}.$$

En permutant dans la dernière relation les indices r et s, on est conduit à l'équation

$$\frac{\partial u^r}{\partial S_s} = \frac{\partial u^s}{\partial S_r}.$$

On peut donc poser

(10) $$u^r = \frac{\partial \varphi}{\partial S_r},$$

φ désignant une fonction des variables S_i assujettie à l'unique condition

(11) $$\left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial S_i \partial S_j} \right| \neq 0.$$

En rapprochant ce résultat de l'équation (9), on est conduit à la relation

$$\frac{\partial \Phi}{\partial S_r} = \sum_i S_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial S_i \partial S_r},$$

qui peut s'écrire encore de la manière suivante

$$\frac{\partial \Phi}{\partial S_r} = \frac{\partial}{\partial S_r}\left(\sum_i S_i \frac{\partial \varphi}{\partial S_i} - \varphi\right).$$

On peut donc poser

$$\Phi = \sum_i S_i \frac{\partial \varphi}{\partial S_i} - \varphi$$

et, d'après les relations (7) et (10),

$$\omega^h = -\frac{\sum_r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial S_h \partial S_r} dS_r}{\sum_r S_r \frac{\partial \varphi}{\partial S_r} - \varphi}.$$

Ces formules donnent la solution la plus générale du problème posé, dans le cas où les fonctions données S_i sont indépendantes. On voit que cette solution dépend d'une fonction arbitraire de n variables satisfaisant à l'unique condition (11).

4. Considérons maintenant le cas où *parmi les composantes S_i, il y a p qui sont indépendantes* ($p<n$). On peut supposer que ce sont les composantes $S_1, S_2, \ldots, S_p$ et que l'on a [2])

(12) $$S_\varkappa = x^\varkappa, \qquad S_{\varkappa'} = S_{\varkappa'}(x^1, x^2, \ldots, x^p).$$

La relation (8) prendra donc la forme

$$d\Phi = \sum_\varkappa x^\varkappa du^\varkappa + \sum_{\varkappa'} S_{\varkappa'} du^{\varkappa'} \quad \text{ou} \quad d\Phi = \sum_i \left(\sum_\varkappa x^\varkappa \frac{\partial u^\varkappa}{\partial x^i} + \sum_{\varkappa'} S_{\varkappa'} \frac{\partial u^{\varkappa'}}{\partial x^i}\right) dx^i.$$

On en déduit

(13) $$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\lambda} &= \sum_\varkappa x^\varkappa \frac{\partial u^\varkappa}{\partial x^\lambda} + \sum_{\varkappa'} S_{\varkappa'} \frac{\partial u^{\varkappa'}}{\partial x^\lambda}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\lambda'}} &= \sum_\varkappa x^\varkappa \frac{\partial u^\varkappa}{\partial x^{\lambda'}} + \sum_{\varkappa'} S_{\varkappa'} \frac{\partial u^{\varkappa'}}{\partial x^{\lambda'}}. \end{aligned}$$

[2]) Ici et dans la suite nous supposons que les indices grecs $\varkappa, \lambda, \ldots$ parcourent les valeurs de 1 jusqu'à p et les indices $\varkappa', \lambda', \ldots$ — les valeurs de $p+1$ jusqu'à n.

La différentiation de ces équations conduit aux formules suivantes:

$$
(14)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} = \dfrac{\partial u^\mu}{\partial x^\lambda} + \sum\limits_{\varkappa} x^\varkappa \dfrac{\partial^2 u^\varkappa}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + \sum\limits_{\varrho'} S_{\varrho'} \dfrac{\partial^2 u^{\varrho'}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + \sum\limits_{\varrho'} \dfrac{\partial S_{\varrho'}}{\partial x^\mu} \dfrac{\partial u^{\varrho'}}{\partial x^\lambda}, \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^{\lambda'} \partial x^\lambda} = \sum\limits_{\varkappa} \dfrac{\partial^2 u^\varkappa}{\partial x^\lambda \partial x^{\lambda'}} + \sum\limits_{\varrho'} S_{\varrho'} \dfrac{\partial^2 u^{\varrho'}}{\partial x^\lambda \partial x^{\lambda'}}, \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\lambda \partial x^{\lambda'}} = \dfrac{\partial u^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} + \sum\limits_{\varrho'} \dfrac{\partial S_{\varrho'}}{\partial x^\lambda} \dfrac{\partial u^{\varrho'}}{\partial x^{\lambda'}} + \sum\limits_{\varrho'} S_{\varrho'} \dfrac{\partial^2 u^{\varrho'}}{\partial x^\lambda \partial x^{\lambda'}} + \sum\limits_{\varkappa} x^\varkappa \dfrac{\partial^2 u^\varkappa}{\partial x^\lambda \partial x^{\lambda'}}, \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^{\lambda'} \partial x^{\mu'}} = \sum\limits_{\varkappa} x^\varkappa \dfrac{\partial^2 u^\varkappa}{\partial x^{\lambda'} \partial x^{\mu'}} + \sum\limits_{\varrho'} S_{\varrho'} \dfrac{\partial^2 u^{\varrho'}}{\partial x^{\lambda'} \partial x^{\mu'}}.
\end{cases}
$$

En comparant les deux dérivées $\partial^2\Phi/\partial x^{\lambda'}\partial x^\lambda$ et $\partial^2\Phi/\partial x^\lambda\partial x^{\lambda'}$ on trouve

$$\frac{\partial u^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} + \sum_{\varrho'} \frac{\partial S_{\varrho'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial u^{\varrho'}}{\partial x^{\lambda'}} = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$(15)\qquad \frac{\partial}{\partial x^{\lambda'}} \Big(u^\lambda + \sum_{\varrho'} \frac{\partial S_{\varrho'}}{\partial x^\lambda} u^{\varrho'} \Big) = 0,$$

toutes les dérivées $\partial^2 S_{\varrho'}/\partial x^\lambda \partial x^{\lambda'}$ étant nulles en vertu des équations (12). Donc, si l'on pose

$$(16)\qquad \psi^\lambda = u^\lambda + \sum_{\varrho'} \frac{\partial S_{\varrho'}}{\partial x^\lambda} u^{\varrho'},$$

on aura, d'après (15) $\partial\psi^\lambda/\partial x^{\lambda'} = 0$. Ainsi la fonction ψ^λ dépend seulement des variables $x^1, x^2, \ldots, x^p$.

En permutant les indices λ et μ dans la première des formules (14) et en comparant l'équation ainsi obtenue à la formule primitive, on trouve

$$\frac{\partial u^\mu}{\partial x^\lambda} + \sum_{\varrho'} \frac{\partial S_{\varrho'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial u^{\varrho'}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial u^\lambda}{\partial x^\mu} + \sum_{\varrho'} \frac{\partial S_{\varrho'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial u^{\varrho'}}{\partial x^\mu}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \Big(u^\mu + \sum_{\varrho'} \frac{\partial S_{\varrho'}}{\partial x^\mu} u^{\varrho'} \Big) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big(u^\lambda + \sum_{\varrho'} \frac{\partial S_{\varrho'}}{\partial x^\lambda} u^{\varrho'} \Big).$$

En tenant compte de la formule (16), on a donc

$$\frac{\partial \psi^\mu}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial \psi^\lambda}{\partial x^\mu}.$$

Comme la fonction ne dépend que des variables $x^1, x^2, \ldots, x^p$, on peut déterminer une fonction ψ de ces variables, telle que l'on ait $\psi^\lambda = \partial\psi/\partial x^\lambda$. On aura donc d'après l'équation (16)

$$(17)\qquad u^\lambda + \sum_{\varrho'} \frac{\partial S_{\varrho'}}{\partial x^\lambda} u^{\varrho'} = \frac{\partial \psi}{\partial x^\lambda}.$$

Nous voyons ainsi que pour trouver l'espace en question dans le cas considéré, il faut prendre une fonction arbitraire ψ des variables $x^1, x^2, \ldots, x^p$ et $n-p$ fonctions arbitraires $u^{p+1}, u^{p+2}, \ldots, u^n$ des variables $x^1, x^2, \ldots, x^n$ et déterminer ensuite les fonctions $u^1, u^2, \ldots, u^p$ au moyen des équations (17).

Comme les fonctions u^h doivent être indépendantes, il faut choisir ψ et $u^{p+1}, \ldots, u^n$ de façon que

$$\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^\varkappa \partial x^\lambda} \right| \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{D(u^{p+1}, \ldots, u^n)}{D(x^{p+1}, \ldots, x^n)} \neq 0.$$

Nous pouvons prendre $u^{\varkappa'} = x^{\varkappa'}$, ce qui ne restreint point la généralité de la solution. Par suite l'équation (17) devient

$$(18)\qquad u^\lambda + \sum_{\varrho'} \frac{\partial S_{\varrho'}}{\partial x^\lambda} x^{\varrho'} = \frac{\partial \psi}{\partial x^\lambda}.$$

Pour achever la détermination de l'espace il faut maintenant trouver la fonction Φ, ce qui peut être fait au moyen d'une quadrature. En effet, en différentiant l'équation (18), on trouve

$$\frac{\partial u^\lambda}{\partial x^\varkappa} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^\varkappa \partial x^\lambda} - \sum_{\varrho'} \frac{\partial^2 S_{\varrho'}}{\partial x^\varkappa \partial x^\lambda} x^{\lambda'}.$$

Si l'on porte cette expression dans la première des équations (13), où l'on a interverti au préalable le rôle des indices $\varkappa$ et λ, il vient

$$(19)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x^\varkappa} = \sum_{\lambda} x^\lambda \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^\varkappa \partial x^\lambda} - \sum_{\lambda\varrho'} x^\lambda \frac{\partial^2 S_{\varrho'}}{\partial x^\varkappa \partial x^\lambda} x^{\varrho'}.$$

Si l'on tient compte des identités

$$\sum_{\lambda} x^\lambda \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^\varkappa \partial x^\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\varkappa} \sum_{\lambda} x^\lambda \frac{\partial \psi}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \psi}{\partial x^\varkappa}$$

et

$$\sum_{\lambda\varrho'} x^\lambda \frac{\partial^2 S_{\varrho'}}{\partial x^\varkappa \partial x^\lambda} x^{\varrho'} = \frac{\partial}{\partial x^\varkappa} \sum_{\lambda\varrho'} x^\lambda \frac{\partial S_{\varrho'}}{\partial x^\lambda} x^{\varrho'} - \sum_{\varrho'} \frac{\partial S_{\varrho'}}{\partial x^\varkappa} x^{\varrho'},$$

l'équation (19) devient

$$(20)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x_\varkappa} = \frac{\partial}{\partial x^\varkappa}\Big(\sum_\lambda x^\lambda \frac{\partial \psi}{\partial x^\lambda} - \psi - \sum_{\lambda\varrho'} x^\lambda \frac{\partial S_{\varrho'}}{\partial x^\lambda} x^{\varrho'} + \sum_{\varrho'} S_{\varrho'} x^{\varrho'}\Big).$$

En calculant la dérivée $\partial u^\lambda/\partial x^{\varkappa'}$ au moyen de l'équation (18) et en la portant dans la deuxième des équations (13), après y avoir remplacé l'indice $\varkappa$ par l'indice λ, on arrive, par un calcul tout semblable au précédent, à l'expression suivante

$$(21)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\lambda'}} = \frac{\partial}{\partial x^{\lambda'}}\Big(\sum_\lambda x^\lambda \frac{\partial \psi}{\partial x^\lambda} - \psi - \sum_{\lambda\varrho'} x^\lambda \frac{\partial S_{\varrho'}}{\partial x^\lambda} x^{\varrho'} + \sum_{\varrho'} S_{\varrho'} x^{\varrho'}\Big).$$

Il résulte des équations (20) et (21) que l'on peut écrire

$$(22)\qquad \Phi = \sum_\lambda x^\lambda \frac{\partial \psi}{\partial x^\lambda} - \psi - \sum_{\lambda\varrho'} x^\lambda \frac{\partial S_{\varrho'}}{\partial x^\lambda} x^{\varrho'} + \sum_{\varrho'} S_{\varrho'} x^{\varrho'}.$$

Les fonctions $u^\varkappa$, $u^{\varkappa'}$ et Φ étant ainsi déterminées, nous pouvons calculer les formes ω^h, en tenant compte des expressions (7).

La solution la plus générale dans le cas traité à présent dépend donc d'une fonction arbitraire ψ de p variables $x^\varkappa$ assujettie à l'unique condition

$$\left|\frac{\partial \psi^2}{\partial x^\varkappa \partial x^\lambda}\right| \neq 0.$$

5. Supposons, pour terminer, que *toutes les composantes S_i ont des valeurs constantes.* On aura, d'après les équations (8) et (7),

$$\Phi = \sum_i S_i u^i$$

et par conséquent

$$\omega^h = -\frac{du^h}{\sum_i S_i u^i}.$$

C'est un résultat bien connu.