SUR UN POLYNÔME D'INTERPOLATION[1]

PAR

W. WOLIBNER (WROCŁAW)

Soient sur le plan n points $P_k(a_k, b_k)$, où $k=1,2,\ldots,n$, $a_{k-1}<a_k$ et $b_{k-1}\neq b_k$. Soit $\varphi(x)$ la fonction dont le diagramme se compose de $n-1$ segments $P_{k-1}P_k$.

Je vais construire *un polynôme qui croît et décroît simultanément avec $\varphi(x)$ dans l'intervalle $I=\langle a_1, a_n\rangle$, et dont le diagramme passe par tous les points P_k* [2].

Lemme. *Il existe un polynôme qui croît et décroît simultanément avec $\varphi(x)$ dans I et qui, avec une précision imposée d'avance, admet b_k comme valeurs pour $x=a_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$.*

Il est évident que l'on peut (à l'aide des segments et des arcs des cercles par exemple) construire le diagramme d'une fonction dérivable $\varphi_1(x)$, définie dans I, passant par tous les points P_k et telle que $\varphi_1(x)$ croisse et décroisse simultanément avec $\varphi(x)$ et que $\varphi_1'(x)$ n'admette que des zéros simples. Je désigne par c_l (où $l=1,2,\ldots,m\leqslant n$) ces nombres a_k qui sont des zéros de $\varphi_1'(x)$. Alors $\varphi_1'(x)\Big/\prod\limits_{l=1}^{m}(x-c_l)$ ne s'annule pas. Soit $G(x)$ un polynôme qui ne s'annule pas dans I et qui approche suffisamment $\varphi_1'(x)\Big/\prod\limits_{l=1}^{m}(x-c_l)$. Le polynôme

$$b_1+\int_0^x G(x)\prod_{l=1}^{m}(x-a_l)\,dx$$

jouit des propriétés exigées. Le lemme est ainsi démontré.

Pour chaque $\varepsilon>0$ et pour chaque $h=2,3,\ldots,n$, j'envisage les points $P_{k,\varepsilon}^{(h)}(a_k, b_{k,\varepsilon}^{(h)})$, $k=1,2,\ldots,n$, tels que $b_{k-1,\varepsilon}^{(h)}\neq b_{k,\varepsilon}^{(h)}$, $|b_{k,\varepsilon}^{(h)}|<\varepsilon$, $k=1,2,\ldots,h-1$; $|b_{k,\varepsilon}^{(h)}-1|<\varepsilon$, $k=h,h+1,\ldots,n$, et que les fonctions correspondantes $\varphi^{(h)}(x)$ croissent et décroissent simultanément avec $\varphi(x)$, respectivement avec $-\varphi(x)$, selon que b_h-b_{h-1} est positif ou négatif. En vertu du lemme on peut construire des polynômes $Q_\varepsilon^{(h)}(x)$, $h=2,3,\ldots,n$, croissant et décroissant simultanément avec $\varphi(x)$, respectivement avec $-\varphi(x)$, selon que b_h-b_{h-1} est positif ou négatif, et tels que

$$|Q_\varepsilon^{(h)}(a_k)|\leqslant\varepsilon,\ k=1,2,\ldots,h-1;\quad |Q_\varepsilon^{(h)}(a_k)-1|<\varepsilon,\ k=h,h+1,\ldots,n.$$

Je pose encore $Q_\varepsilon^{(1)}(x)\equiv 1$.

Désignons par A_ε le déterminant $|Q_\varepsilon^{(h)}(a_k)|$, $k,h=1,2,\ldots,n$, et par $B_\varepsilon^{(h)}$ le déterminant obtenu par remplacement de la h-ième colonne de A_ε par les b_k. Il est évident que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}A_\varepsilon=1$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}B_\varepsilon^{(h)}=b_h-b_{h-1}$, $h=2,3,\ldots,n$. Donc, pour un ε_0 suffisamment petit, on aura $A_{\varepsilon_0}>0$ et le signe de $B_\varepsilon^{(h)}$ sera le même que celui de b_h-b_{h-1}, $h=2,3,\ldots,n$. Le polynôme

$$W(x)=\sum_{h=1}^{n}\frac{B_{\varepsilon_0}^{(h)}}{A_{\varepsilon_0}}Q_{\varepsilon_0}^{(h)}(x)$$

sera le polynôme désiré. En effet, d'après les formules de Cramer

$$W(a_k)=\sum_{h=1}^{n}\frac{B_{\varepsilon_0}^{(h)}}{A_{\varepsilon_0}}Q_{\varepsilon_0}^{(h)}(a_k)=b_k,$$

et $W(x)$, de même que tous ses termes sauf le prémier qui est constant, croissent et décroissent simultanément avec $\varphi(x)$.

---

[1]) Présenté à la Société Polonaise de Mathématique (section de Wrocław) le 11 novembre 1949. Un résultat plus général a été publié récemment dans la note de Hidehiko Yamabe, *On an Extension of the Helly's Theorem*, Osaka Mathematical Journal 2 (1950), p. 15-17.

[2]) J'ai obtenu le résultat de cette note dans la forme ci-dessous grâce à un entretien avec J. G.-Mikusiński et C. Ryll-Nardzewski.