# SUR L'INDÉPENDANCE DES DOMAINES SIMPLES DANS L'ESPACE EUCLIDIEN À $n$ DIMENSIONS

PAR

A. RÉNYI, C. RÉNYI ET J. SURÁNYI (BUDAPEST)

**1.** Dans un fascicule précédant de ce Journal [1]), E. Marczewski s'occupe de la notion d'indépendance (au sens de la Théorie des Ensembles) et l'examine en connexion avec les fondements de la théorie abstraite des probabilités. Le présent travail concerne l'indépendance dans un autre domaine: il contient quelques théorèmes et quelques problèmes élémentaires sur l'indépendance des intervalles et des sphères de l'espace euclidien à $n$ dimensions ainsi que des polygones convexes du plan euclidien. Bien que ces considérations soient tout à fait élémentaires, elles peuvent présenter un intérêt, tant par leurs caractères surprenants, que par ce qu'ils peuvent être utilisés comme point de départ pour examiner l'indépendance des ensembles du type plus général.

**2.** Établissons d'abord quelques définitions et notations. Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des sous-ensembles d'un ensemble $E$. Soit $-E_i = E - E_i$ l'ensemble complémentaire de $E_i$. Soit $k$ un nombre entier quelconque tel que $0 \leqslant k \leqslant n$. Choisissons $k$ nombres quelconques parmi les nombres $1, 2, \ldots, n$, et désignons-les par $r_1, r_2, \ldots, r_k$; soient $s_1, s_2, \ldots, s_{n-k}$ ceux des nombres $1, 2, \ldots, n$ qui ne figurent pas parmi les $r_i$. Nous désignons par $E(r_1, r_2, \ldots, r_k; s_1, s_2, \ldots, s_{n-k})$ l'ensemble

$$E_{r_1} \cdot E_{r_2} \cdot \ldots \cdot E_{r_k} \cdot (-E_{s_1}) \cdot (-E_{s_2}) \cdot \ldots \cdot (-E_{s_{n-k}})$$

(où $A \cdot B \cdot C \cdot \ldots$ désigne la partie commune des ensembles $A, B, C, \ldots$). Nous dirons que les ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont indépendants, si $E(r_1, r_2, \ldots, r_k; s_1, s_2, \ldots, s_{n-k})$ est non vide pour chaque valeur de $k$ et pour chaque choix de $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Ainsi l'indépendance des sous-ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ d'un ensemble $E$ signifie que $E$ peut être décomposé en $2^n$ ensembles non vides, disjoints deux à deux, chacun défini comme la partie commune de quelques ensembles $E_i$ avec les complémentaires des autres.

Dans ce qui suit, l'ensemble $E$ sera ou bien l'espace euclidien à $n$ dimensions (désigné par $E^{(n)}$), ou bien la surface $S^{(n)}$ d'une sphère à $n+1$ dimensions dans $E^{(n+1)}$. C'est-à-dire, $S^{(n)}$ est l'ensemble des points $P = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ qui satisfont à l'équation

$$\sum_{i=1}^{n+1} (x_i - a_i)^2 = R^2$$

où les $a_i$ et $R$ sont des nombres réels quelconques.

Nous appelons *intervalle* dans $E^{(n)}$ l'ensemble (ouvert) des points $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui satisfont aux conditions $a_i < x_i < b_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, où $a_i$ et $b_i$ $(a_i < b_i)$ sont des nombres réels arbitraires. Nous désignons cet intervalle par $J(a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_n, b_n)$.

**3.** Nous allons démontrer les théorèmes suivants:

*Théorème A. Pour chaque entier $n \geqslant 1$, le nombre maximum d'intervalles indépendants dans $E^{(n)}$ est égal à $2n$.*

*Théorème B. Pour chaque entier $n \geqslant 1$, le nombre maximum de sphères à $n$ dimensions indépendantes dans $E^{(n)}$ est égal à $n+1$.*

*Théorème C. Soit $N(k)$ le nombre maximum de domaines polygonaux convexes (ouverts) indépendants dans le plan, chaque polygone ayant $k$ côtés au plus; nous avons alors*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{N(k)}{\log k} = \frac{1}{\log 2}.$$

**4.** Pour démontrer le théorème A, nous allons démontrer d'abord que $2n+1$ intervalles dans $E^{(n)}$ ne peuvent pas être indépendants. Soient $J_k = J(a_{k1}, b_{k1}; a_{k2}, b_{k2}, \ldots; a_{kn}, b_{kn})$ des intervalles supposés indépendants $(k = 1, 2, \ldots, 2n+1)$ et

$$J_0 = J(a_{01}, b_{01}; a_{02}, b_{02}; \ldots a_{0n}, b_{0n}) = E(1, 2, \ldots, 2n+1)$$

leur partie commune. Alors

$$a_{0i} = \max_{1 \leqslant k \leqslant 2n+1} a_{ki} \quad \text{et} \quad b_{0i} = \min_{1 \leqslant k \leqslant 2n+1} b_{ki}$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Ainsi chaque $a_{0i}$ et chaque $b_{0i}$ coïncide au moins avec un des $a_{ki}$, respectivement $b_{ki}$. Choisissons quelques intervalles $J_{k_1}, J_{k_2}, \ldots, J_{k_{2n}}$ de telle sorte que $a_{0i} = a_{k_i i}$ et $b_{0i} = b_{k_{i+n} i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Désignons par $r_1, r_2, \ldots, r_p$ tous les différents indices parmi $k_1, k_2, \ldots, k_{2n}$ et par $s_1, s_2, \ldots, s_q$ $(q = 2n+1-p)$ — ceux

[1]) E. Marczewski, *Indépendance d'ensembles et prolongements de mesures*, Colloquium Mathematicum 1 (1947-1948), p. 122-132.

des nombres $1,2,\ldots,2n+1$ qui ne figurent pas parmi les $r_i$. Evidemment $p\leqslant 2n$, donc $q\geqslant 1$. Selon la définition de $r_k$,

$$J_0=J_{r_1}\cdot J_{r_2}\cdot\ldots\cdot J_{r_p}.$$

D'après la définition de $J_0$,

$$J_0\cdot(-J_{s_1})\cdot(-J_{s_2})\cdot\ldots\cdot(-J_{s_q})=0,$$

d'où

$$E(r_1,r_2\ldots,r_p;s_1,s_2,\ldots,s_q)=J_{r_1}\cdot J_{r_2}\cdots J_{r_p}\cdot(-J_{s_1})\cdot(-J_{s_2})\ldots\cdot(-J_{s_q})=0,$$

en contradiction avec l'hypothèse que nos intervalles sont indépendants.

D'autre part, les $2n$ intervalles $J_k, J_{n+k}$ $(k=1,2,\ldots,n)$ définis par les inégalités

$J_k$: $0<x_k<1/2$ et $0<x_i<1$ pour $i\neq k$, et $i=1,2,\ldots,n$,

$J_{k+n}$: $1/4<x_k<3/4$ et $0<x_i<1$ pour $i\neq k$, et $i=1,2,\ldots,n$,

sont indépendants dans $E^{(n)}$, ce qui achève la démonstration.

**5.** Nous démontrerons le théorème B par induction. Désignons par $B_k^n$ le nombre maximum des parties, en lesquelles les surfaces de $k$ sphères à $n$ dimensions divisent $E^{(n)}$, et par $C_k^n$ le nombre maximum des parties, en lesquelles la surface $S^{(n)}$ est divisée par les surfaces des sphères à $n-1$ dimensions, obtenues par l'intersection de la surface $S^{(n)}$ avec les surfaces de $k$ autres sphères de $E^{(n+1)}$. En appliquant la projection stéréographique de $S^{(n)}$ sur $E^{(n)}$, nous obtenons le suivant

*Lemme 1. On a*

$$C_k^n=B_k^n.$$

Soit $S^{(n)}$ la surface d'une sphère fixe dans $E^{(n+1)}$; soient $Q_1,Q_2,\ldots,Q_k$ les $k$ sphères dans $E^{(n+1)}$, qui se coupent avec la surface $S^{(n)}$. On peut alors choisir une projection stéréographique qui transforme $S^{(n)}$ en $E^{(n)}$ de façon que les produits $S^{(n)}\cdot Q_i$ $(i=1,2,\ldots,k)$ aient, comme projection sur $E^{(n)}$, des sphères $Q_i'$. Il suffit à cet effet que le centre de la projection ne soit sur la surface d'aucune sphère $Q_i$.

Inversement, étant donné un système de sphères $Q_1', Q_2', \ldots, Q_k'$ dans $E^{(n)}$, nous pouvons transformer par projection stéréographique $E^{(n)}$ en $S^{(n)}$ de façon qu'il existe dans $E^{(n+1)}$ un tel système de sphères $Q_1,Q_2,\ldots,Q_k$ que l'image de $Q_i'$ $(i=1,2,\ldots,k)$ soit de la forme $S^{(n)}\cdot Q_i$.



Ainsi, puisque la projection stéréographique conserve le nombre de parties obtenues dans la décomposition de $S^{(n)}$ (ou de $E^{(n)}$), le lemme est démontré.

A l'aide du Lemme 1, nous évaluons aisément $B_k^n$.

*Lemme 2. On a*

$$B_k^n\leqslant 2\cdot\sum_{r=0}^{p}\binom{k-1}{r} \quad \text{où } p=\min(k-1,n).$$

Nous démontrons d'abord la formule récurrente:

$$B_k^n=B_{k-1}^n+B_{k-1}^{n-1}. \tag{1}$$

Considérons $k$ sphères à $n$ dimensions dans $E^{(n)}$ et désignons leurs surfaces par $S_1,S_2,\ldots,S_k$. On voit aisément que le nombre de parties en lesquelles $E^{(n)}$ est divisé par $S_1,S_2,\ldots,S_k$ ne dépasse pas le nombre de parties en lesquelles $E^{(n)}$ est divisé par $S_1,S_2,\ldots,S_{k-1}$, augmenté par le nombre de parties en lesquelles $S_k$ est divisé par ses intersections avec $S_1,S_2,\ldots,S_{k-1}$; en d'autres termes, nous avons

$$B_k^n\leqslant B_{k-1}^n+C_{k-1}^{n-1}. \tag{2}$$

En utilisant le lemme 1, nous en concluons

$$B_k^n\leqslant B_{k-1}^n+B_{k-1}^{n-1}, \tag{3}$$

d'où résulte la thèse du lemme par un simple calcul, en utilisant les valeurs initiales $B_1^n=2$ pour $n=1,2,3,\ldots$ et $B_k^1=2k$ [2]) pour $k=1,2,3,\ldots$

On peut démontrer par induction que, dans le lemme 2, l'inégalité $\leqslant$ peut être remplacée par l'égalité.

Nous donnons à la fin du travail quelques valeurs de $B_k^n$.

Démonstration du théorème B. Pour que $k$ sous-ensembles d'un ensemble $E$ soient indépendants, il est nécessaire qu'ils divisent $E$ en $2^k$ parties disjointes deux à deux. En vertu du lemme 2, nous avons pour $k>n+1$

$$B_k^n\leqslant 2\cdot\sum_{r=0}^{n}\binom{k-1}{r}<2\cdot\sum_{r=0}^{k-1}\binom{k-1}{k}=2^k.$$

D'autre part, on voit aisément par induction que $n+1$ sphères à rayon $r$ et dont les centres forment un simplexe régulier à cotés $r$, sont indépendantes.

[2]) Il est clair que $E^{(1)}$ doit être considéré comme la droite projective.

Remarquons encore que les énoncés des théorèmes A et B coïncident pour $n=1$.

**6.** Nous allons démontrer le théorème C à l'aide des inégalités

$$\frac{2^{N(k)-2}}{N(k)-1} \leqslant k \leqslant N(3(2^{k-1}-1)). \tag{5}$$

La première partie de (5) est une simple conséquence de ce que deux lignes polygonales fermées convexes, dont chacune a $k$ côtés au plus, ne peuvent avoir plus que $2k$ points d'intersection. Donc, si nous considérons $N(k)$ domaines polygonaux de $k$ côtés au plus, la frontière d'aucun d'eux ne peut passer à travers de plus de $2k\cdot(N(k)-1)$ domaines limités par les frontières des autres. Si les domaines en question sont indépendants, la frontière de chacun d'eux passe à travers de $2^{N(k)-1}$ domaines limités par les frontières des autres. Nous avons donc

$$2^{N(k)-1} \leqslant 2k\,(N(k)-1).$$

Pour démontrer la seconde partie de l'inégalité (5), nous construirons $k$ polygones indépendants, chacun à $3\cdot(2^{k-1}-1)$ côtés au plus, comme suit. Choisissons sur une circonférence $n=2^k-2$ points consécutifs $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Le polygone $A_1A_2\ldots A_n$ sera la partie commune de tous les polygones à construire. Choisissons ensuite un point sur chaque arc $A_iA_{i+1}$ $(i=1,2,\ldots,n;\ A_{n+1}=A_1)$; nous les désignons par

$$B_1, B_2, \ldots, B_k, B_{12}, B_{13}, \ldots, B_{1k}, B_{23}, \ldots, B_{k-1,k}, \ldots, B_{23\ldots k}$$

(l'indice parcourant toutes les combinaisons de nombres $1,2,\ldots,k$, excepté la combinaison $1,2,\ldots,k$). Le domaine polygonal (ouvert) $\Pi_r$ $(r=1,2,\ldots,k)$ soit l'ensemble des points intérieurs du plus petit domaine convexe (fermé) contenant tous les points $A_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ et chaque point $B$ dont l'indice contient le nombre $r$. Donc, chaque $\Pi_r$ aura $2^k-2+2^{k-1}-1=3(2^{k-1}-1)$ côtés. Démontrons que les domaines $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_r$ sont indépendants. En effet, l'ensemble $E(r_1, r_2, \ldots, r_p; s_1, s_2, \ldots, s_{k-p})$ est un triangle dont un sommet est $B_{r_1r_2\ldots r_p}$ et les deux autres sont les extrémités de l'arc $A_iA_{i+1}$ qui contient le point $B_{r_1r_2\ldots r_p}$.

Ainsi l'inégalité (5) est démontrée. Comme d'ailleurs $N(k)$ est une fonction monotone de $k$, il résulte des deux membres de l'inégalité (5) que



$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{N(k)}{\log k} \leqslant \frac{1}{\log 2} \quad \text{et que} \quad \varliminf_{k\to\infty} \frac{N(k)}{\log k} \geqslant \frac{1}{\log 2};$$

le théorème C est ainsi démontré.

**7.** Nous posons enfin quelques problèmes qui ne sont pas encore résolus:

**P 71.** L'inégalité (5) donne des bornes pour $N(k)$, dont l'inférieure peut être augmentée encore, car une autre construction, aussi simple que celle donnée ci-dessus, fournirait $k$ polygones indépendants convexes de $2^{k-1}-1$ côtés seulement. Problème: trouver la valeur exacte de $N(k)$.

**P 72.** Comment peut-on généraliser le théorème C pour l'espace à $n$ dimensions, $n=3,4,\ldots$?

**P 73.** Pour $n=2$, le théorème B peut être généralisé par remplacement des cercles par des domaines convexes perspectifs. Ceci résulte de ce que deux courbes convexes perspectives ne peuvent avoir plus de 2 points d'intersection (excepté le cas où les deux courbes ont un segment droit commun). Peut-on étendre cette généralisation du théorème B à un nombre de dimensions quelconque?

*Valeurs de $B_k^n$*

| Valeurs de $k$ | Valeurs de $n$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 3 | 6 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 4 | 8 | 14 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 |
| 5 | 10 | 22 | 30 | 32 | 32 | 32 | 32 | 32 | 32 | 32 |
| 6 | 12 | 32 | 52 | 62 | 64 | 64 | 64 | 64 | 64 | 64 |
| 7 | 14 | 44 | 84 | 114 | 126 | 128 | 128 | 128 | 128 | 128 |
| 8 | 16 | 58 | 128 | 198 | 240 | 254 | 256 | 256 | 256 | 256 |
| 9 | 18 | 74 | 186 | 326 | 438 | 494 | 510 | 512 | 512 | 512 |
| 10 | 20 | 92 | 260 | 512 | 764 | 932 | 1004 | 1022 | 1024 | 1024 |

Budapest, le 21 Avril 1949

Séminaire Mathématique de l'Université de Budapest