as well suppose β to be equally distributed, which is not equivalent with the uniform distribution of α. How are we to know to which parameter, α or β, should we to apply the hypothesis of uniformity?

For problems of quality control the answer is simple: inspection by sampling is a game in which good items appear with probability α, and we have to determine this probability; β is not a probability. Thus in all problems of quality control a conventional rule settles the question: the unknown quality of the lot is a priori uniformly distributed.

The same situation prevails in experiments where the toxicity of a poison is to be determined by tests, in which the poison is sprayed on insects. There are different methods to define the unknown parameter; only one, the probability that an insect will be killed, corresponds to our conventional rule. The toxicity changes with the concentration of the poison, and for every concentration the hypothesis has to be made separately. This remark shows that hypothesis B has nothing to do with the real distribution of toxicities in nature.

Państwowy Instytut Matematyczny
The State Institute of Mathematics

THÉORÈMES ERGODIQUES ET LEURS APPLICATIONS

PAR

S. HARTMAN, E. MARCZEWSKI ET C. RYLL-NARDZEWSKI
(WROCŁAW)

Nous nous proposons de donner dans cette communication un aperçu raisonné des théorèmes ergodiques dans leur variante discrète, de quelques unes de leurs généralisations et de leurs applications. Nous y rappelons les théorèmes connus, envisagés en particulier dans les beaux travaux de F. Riesz [20, 21] et signalons les résultats récents, surtout ceux contenus dans les travaux de Ryll-Nardzewski qui se trouvent en préparation pour Studia Mathematica. Les démonstrations seront ici pour la plupart omises ou seulement esquissées; celles des théorèmes connus sont à trouver dans les travaux cités (voir p. 122-123), dont les numéros sont indiqués en crochets.

Cette communication est en même temps un rapport sur les études et recherches concernant les théorèmes ergodiques, faites à Wrocław par le Groupe des Fonctions Réelles de l'Institut Mathématique de l'État. Ce sont justement les travaux précités de F. Riesz qui ont été le point de départ de ces recherches.

1. Transformations mesurables. Nous entenderons par l'*espace*, et désignerons d'ordinaire par X, un ensemble abstrait fixé, par *ensembles mesurables* — les ensembles appartenant à un σ-corps fixé $\boldsymbol{M}$ de sous-ensembles de X, et par *mesure* — une fonction fixée $\mu(E)$ d'ensemble, définie pour tout $E \epsilon \boldsymbol{M}$, non-négative, finie [1]) et σ-additive.

Pour simplifier les énoncés, nous supposons une fois pour toutes que $\mu(X)=1$.

Les *fonctions* seront entendues partout comme fonctions réelles définies dans l'espace tout entier. Nous adoptons pour elles les définitions habituelles de la *mesurabilité*, de l'*intégrale*

[1]) Si l'on admet les mesures *σ-finies*, c'est-à-dire pour lesquelles X est somme d'une suite d'ensembles de mesure finie, il faut modifier convenablement les énoncés et les démonstrations.

et de l'*intégrabilité* par rapport à la mesure considérée. Le symbole $\int f$ désignera l'intégrale de la fonction f sur l'espace entier par rapport à cette mesure.

Une transformation $y=\varphi(x)$ de l'espace X en lui-même sera dite *mesurable* lorsque l'image réciproque $\varphi^{-1}(E)$ de tout ensemble mesurable E est mesurable. Nous dirons que la transformation μ *conserve la mesure* lorsqu'elle est mesurable et que $\mu[\varphi^{-1}(E)]=\mu(E)$ pour tout ensemble $E\epsilon \boldsymbol{M}$. Enfin, nous dirons qu'elle *conserve la mesure nulle* lorsqu'elle est mesurable et que $\mu(E)=0$ entraîne $\mu[\varphi^{-1}(E)]=0$.

Un ensemble mesurable E s'appellera *invariant* par rapport à la transformation mesurable φ lorsque $\varphi^{-1}(E)=E$; il s'appellera *presque invariant* lorsque $\mu[\varphi^{-1}(E)\dot{-}E]=0$, le signe $\dot{-}$ désignant la différence symétrique.

Il est facile de voir que φ étant une transformation qui conserve la mesure nulle et E — un ensemble presque invariant, il existe toujours un ensemble invariant E^* pour lequel $\mu(E\dot{-}E^*)=0$. Tel est, par exemple, l'ensemble $E^*=\overline{\lim_n}\,\varphi^{-n}(E)$.

Une transformation mesurable φ sera dite *indécomposable* [2]) lorsque tout ensemble invariant par rapport à elle est de mesure 0 ou 1.

Pour les transformations φ conservant la mesure nulle, l'invariance peut être remplacée ici par la presque-invariance, ce qui implique aisément l'équivalence entre l'indécomposabilité et la propriété suivante de φ: toute fonction réelle mesurable f qui est presque invariante par rapport à φ (c'est-à-dire telle que $f[\varphi(x)]=f(x)$ pour presque tout $x\epsilon X$) est constante presque partout.

Envisageons un exemple: X soit l'intervalle $0\leqslant x<1$, μ — la mesure de Lebesgue et α — la transformation

$$\alpha(x)=R(x+\xi),$$

la fonction R désignant le reste mod 1 (fig. 1, p. 121).

Evidemment, la transformation α conserve la mesure. Si, en outre, le nombre ξ est irrationnel, α est indécomposable — ce qui se laisse déduire facilement du théorème classique d'après

[2]) Terme employé, par exemple, par Halmos (cf. [9], p. 1018). D'autres auteurs emploient le terme *métriquement transitive* ou *ergodique*.

lequel la suite $\{R(n\xi)\}$ est dense dans X et du théorème de Steinhaus ([22], p. 99, Théorème VII) d'après lequel l'ensemble des distances entre les points de deux ensembles mesurables de mesure positive contient un intervalle. C'est l'exemple le plus connu d'une transformation à la fois conservant la mesure, indécomposable et biunivoque.

F. Riesz [20] a donné le simple exemple suivant d'une transformation conservant la mesure, indécomposable, mais dont l'inverse est essentiellement plurivoque (fig. 2, p. 121):

$$\beta(x)=R(2x),\quad \text{c'est-à-dire}\quad \beta(0,c_1c_2c_3\ldots)=0,c_2c_3c_4\ldots,$$

où c_i désigne le i-ème chiffre du développement dyadique de x. L'indécomposabilité de β résulte aussi du théorème précité de Steinhaus.

En modifiant une transformation définie par Khintchine [11], Marczewski a défini la transformation suivante γ qui peut être regardée comme une généralisation de β. L'espace X soit $\mathcal{E}^{\aleph_0}$, c'est-à-dire celui de toutes les suites infinies $x=\{x_1,x_2,\ldots\}$ de nombres réels; la mesure μ soit définie dans le corps de tous les ensembles boreliens dans $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ et assujettie à la condition d'*homogénéité*:

$$\mu\Big(\underset{x}{E}[\{x_1,\ldots,x_n\}\epsilon E]\Big)=\mu\Big(\underset{x}{E}[\{x_2,\ldots,x_{n+1}\}\epsilon E]\Big)$$

pour tout ensemble borelien $E\subset\mathcal{E}^n$ où $n=1,2,\ldots$ ($\mathcal{E}^n$ désignant l'espace des suites à n termes réels). Il est aisé de constater que la transformation

$$\gamma(\{x_1,x_2,x_3,\ldots\})=\{x_2,x_3,x_4,\ldots\}$$

conserve la mesure μ. En admettant que cette mesure obéit en outre à la *loi du rectangle*, nommée aussi l'*indépendance stochastique*:

$$\mu\Big(\prod_{i=1}^{n}\underset{x}{E}[x_i\epsilon E_i]\Big)=\prod_{i=1}^{n}\mu\Big(\underset{x}{E}[x_i\epsilon E_i]\Big)$$

pour tout ensemble borelien $E_i\subset\mathcal{E}^1$, la transformation γ devient indécomposable — ce qui résulte aussitôt du théorème connu sur les probabilités égales à 0 ou 1, dû à Kolmogoroff ([17], p. 60; cf. Halmos [8], p. 201, (3)).

2. Théorèmes ergodiques. L'ainsi dit *théorème ergodique individuel* de G. D. Birkhoff, énoncé d'abord seulement pour les transformations biunivoques, a été démontré par F. Riesz [20, 21] dans la forme plus générale suivante:

I. *Si la transformation φ conserve la mesure, elle satisfait à la condition*

(B) *Pour toute fonction intégrable f la suite des moyennes*

$$\Phi_n(x)={}^1/n\{f(x)+f[\varphi(x)]+\ldots+f[\varphi^{n-1}(x)]\}$$

converge presque partout vers une fonction Φ intégrable.

Faisant approcher f par des fonctions bornées, on en déduit facilement le *théorème ergodique moyen* de J. von Neumann:

II. *Si la transformation φ conserve la mesure, elle satisfait à la condition*

(N) *Pour toute fonction intégrable f la suite des moyennes Φ_n converge en moyenne.*

Il en résulte aussitôt que $\int f=\int\Phi$. Comme — ce qu'on voit tout de suite — on a $\Phi[\varphi(x)]=\Phi(x)$ presque partout, le théorème I peut être complété comme suit:

III. *Si la transformation φ conserve la mesure et si elle est indécomposable, la suite des moyennes Φ_n converge presque partout vers une constante, à savoir vers $\int f$.*

En particulier, si f est la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable E quelconque, on peut formuler la thèse du théorème III comme suit: *pour presque tout $x\epsilon X$ les points $\varphi^n(x)$ tombent dans l'ensemble E avec la fréquence égale à la mesure de cet ensemble.*

A l'aide des approximations faciles par des fonctions bornées, on parvient du théorème III au théorème suivant, qui le complète pour les fonctions f non-intégrables:

IV. *Si la transformation φ conserve la mesure et si elle est indécomposable, toute fonction mesurable f à l'intégrale $+\infty$ donne lieu à la suite des moyennes Φ_n qui diverge presque partout vers $+\infty$* [3]).

[3]) Sans l'hypothèse d'indécomposabilité de φ, on peut constater, en modifiant convenablement la démonstration du théorème I, que la suite des Φ_n converge presque partout vers une fonction aux valeurs finies ou infinies (cf. Dowker [3], p. 1053, Théorème 1').

Sans hypothèses sur l'intégrabilité, on peut aussi énoncer pour les fonctions mesurables f un théorème ergodique, modelé sur des idées analogues de Steinhaus relatives à la loi des grands nombres: si la transformation φ conserve la mesure et si elle est indécomposable, la suite numérique $\{f[\varphi^n(x)]\}$ a pour presque tout $x\epsilon X$ la même distributrice que la fonction f. Plus précisément:

V. *Si la transformation φ conserve la mesure et si elle est indécomposable, il existe, pour toute fonction mesurable f à distributrice $d(y)$, un ensemble mesurable U de mesure 1, tel que pour tout $x\epsilon U$ et pour tout y réel les termes inférieurs à y de la suite $\{f[\varphi^n(x)]\}$ apparaissent dans cette suite avec la fréquence $d(y)$.*

Pour le démontrer, considérons une suite dénombrable $\{\eta_k\}$, dense sur la droite et contenant tous les points de discontinuité de la distributrice d. Appliquons le théorème III à la fonction caractéristique de l'ensemble E_k des points x pour lesquels on a $f(x)<\eta_k$. Il existe donc un ensemble U_k de mesure 1, tel que pour tout $x\epsilon U_k$ les termes de la suite $x, \varphi(x), \varphi^2(x), \ldots$ tombent dans E_k avec la fréquence $d(\eta_k)$. Reste à poser $U=U_1\cdot U_2\cdot\ldots$ [4]).

Fréchet [6, 7] a déduit de certains théorèmes sur les fonctions presque périodiques un théorème ergodique (en variante continue) sans l'hypothèse de conservation de la mesure. L'hypothèse adoptée par lui sur la transformation φ est très particulière, mais elle donne dans la thèse la convergence partout. En suivant l'idée de Fréchet, mais sans faire intervenir les fonctions presque périodiques, Hartman a remarqué que le théorème III a pour conséquence facile le théorème suivant:

VI. *Hypothèses. X est un espace métrique compact. **M** est le corps des ensembles boreliens de cet espace. La mesure μ est partout positive, c'est-à-dire $\mu(G)>0$ pour tout ensemble ouvert $G\subset X$. La transformation φ conserve la mesure, est indécomposable et ses itérations $\varphi, \varphi^2, \ldots$ sont équicontinues. Enfin, la fonction f est telle que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe deux fonctions g_1 et g_2 continues dans X et pour lesquelles*

$$g_1(x)\leqslant f(x)\leqslant g_2(x) \qquad \textit{pour } x\epsilon X, \qquad \left|\int[g_2(x)-g_1(x)]dx\right|<\varepsilon \text{ [5])}.$$

[4]) Cf. le raisonnement de Steinhaus [23], p. 136.

[5]) Les fonctions f ayant cette propriété pourraient être appelées *intégrables au sens de Riemann relativement à la mesure μ*. Lorsque μ est la mesure de Lebesgue, l'intégrabilité de Riemann ainsi relativisée coïncide avec celle de Riemann au sens ordinaire.

Thèse. La suite des moyennes Φ_n converge partout vers $\int f$.

En effet, si la fonction f est continue, la suite des Φ_n converge, en vertu du théorème III, vers la constante $\int f$ presque partout — donc dans un ensemble dense dans X, car la mesure μ est partout positive — et par conséquent partout, car les fonctions Φ_n sont équicontinues. Le passage aux fonctions discontinues est facile.

3. Applications: moyennes de Weyl et lois des grands nombres. Nous supposons dans les théorèmes VII-IX qui vont suivre que f est une fonction périodique de variable réelle, de période 1. Appelons *n-ième moyenne de Weyl* de cette fonction, relative au nombre réel ξ, la fonction

$$W_n(x) = {}^1/_n\{f(x)+f(x+\xi)+\ldots+f[x+(n-1)\xi]\}.$$

Le théorème classique de H. Weyl [24] est le suivant:

VII. *Si la fonction f est intégrable au sens de Riemann et le nombre ξ est irrationnel, on a partout*

$$\text{(W)} \qquad \lim_n W_n(x) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Khintchine [12] a établi plus tard le théorème:

VIII. *Si la fonction f est intégrable au sens de Lebesgue, on a l'égalité* (W) *presque partout.*

Ce théorème de Khintchine est un cas particulier du théorème ergodique III: il suffit de remarquer que les moyennes Φ_n qui y sont considérées sont celles de Weyl en cas de transformation α (définie p. 110). Le théorème de Weyl résulte du théorème VI, en remplaçant l'intervalle $0 \leqslant x < 1$ par la circonférence: l'espace est alors compact et les transformations $\alpha, \alpha^2, \ldots$ sont équicontinues.

En appliquant le théorème ergodique à la transformation β (définie p. 111), on obtient le théorème classique de Borel sur les nombres normaux et le théorème suivant, plus général, de Raïkov ([19], p. 377, Théorème 1):

IX. *Si la fonction f est intégrable au sens de Lebesgue, on a presque partout*

$$\lim_n {}^1/_n[f(x)+f(2x)+\ldots+f(2^{n-1}x)] = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Considérons à présent la *distributrice d'une suite* $\{f_n\}$ de fonctions mesurables, c'est-à-dire fonction d'une infinité de variables

$$d(y_1, y_2, \ldots) = \mu\Big(\underset{x}{E}[f_1(x)<y_1,\ f_2(x)<y_2,\ \ldots]\Big).$$

Il n'est pas difficile de constater que si la distributrice de $\{f_n\}$ par rapport à une mesure μ coïncide avec celle de $\{g_n\}$ par rapport à une mesure ν, il en est même des autres propriétés des deux suites de fonctions, telles que leur convergence presque partout, la convergence presque partout des suites de leurs moyennes, l'intégrabilité de leurs fonctions-limites etc.

Appelons la suite $f_1, f_2, \ldots$ *homogène* lorsque sa distributrice coïncide avec celle de la suite $f_2, f_3, \ldots$

Telle est, par exemple, toute suite de fonctions indépendantes ayant les mêmes distributrices, la suite de fonctions identiques $f, f, \ldots$ etc. [6]).

Après les explications qui précèdent, il n'est pas difficile de déduire du théorème ergodique la loi des grands nombres de Kolmogoroff ([17], p. 56; Halmos [8], p. 205, (7)):

X. *Si les fonctions $f_1, f_2, \ldots$ sont intégrables, indépendantes et ont les distributrices identiques, la suite des moyennes*

$$F_n(x) = {}^1/_n[f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)]$$

converge presque partout vers $\int f_1$.

Il en est de même du théorème suivant de Khintchine [10, 11] dans la forme généralisée par Doob ([2], p. 291, Theorem 1):

XI. *Si les fonctions $f_1, f_2, \ldots$ sont intégrables et leur suite est homogène, la suite des moyennes F_n converge presque partout vers une fonction intégrable F.*

Pour démontrer X et XI, nous introduisons une transformation auxiliaire $\omega(x)$ de l'espace X (dans lequel les fonctions f_n et la mesure μ sont définies) en espace $\mathcal{E}^{\aleph_0}$, en même temps qu'une mesure ν dans le corps des ensembles boreliens B de $\mathcal{E}^{\aleph_0}$:

$$\omega(x) = \{f_1(x), f_2(x), \ldots\}, \qquad \nu(B) = \mu[\omega^{-1}(B)].$$

[6]) Une communication de E. Marczewski et H. Steinhaus (en préparation pour Colloquium Mathematicum) contiendra quelques exemples simples des suites homogènes de fonctions et quelques théorèmes sur de telles suites.

L'homogénéité de la suite $\{f_n\}$ entraîne aussitôt celle de la mesure ν (au sens défini p. 111). Par conséquent, la transformation γ (définie p. 111) conserve la mesure ν. Soit $g_n(y)$ la n-ième coordonnée du point $y=\{y_1,y_2,\ldots\}$ de l'espace $\mathcal{E}^{\aleph_0}$, c'est-à-dire $g_n(y)=y_n$. L'égalité $g_n[\omega(x)]=f_n(x)$ et la définition de la mesure ν impliquent que la distributrice de la suite $\{f_n\}$ par rapport à μ coïncide avec celle de la suite $\{g_n\}$ par rapport à ν. Il suffit donc, pour établir le théorème XI, de montrer que la suite des moyennes $^1/_n[g_1(y)+g_2(y)+\ldots+g_n(y)]$ converge presque partout (c'est-à-dire sauf aux points d'un ensemble de mesure ν nulle) vers une fonction intégrable par rapport à ν. Mais c'est une conséquence du théorème I, car $g_n(y)=g_1[\gamma^{n-1}(y)]$.

Les hypothèses du théorème XI sont satisfaites en particulier lorsque celles du théorème X le sont. La mesure ν obéit alors à la loi du rectangle (cf. p. 111); la transformation γ est donc indécomposable et, en vertu du théorème III, la fonction-limite est en effet égale presque partout à la constante en question.

4. Théorème ergodique moyen généralisé. Est-ce que la conservation de la mesure est nécessaire pour qu'une transformation mesurable φ satisfasse à la thèse des théorèmes ergodiques I et II?

La réponse est négative: la transformation

$$\psi(x)=\begin{cases}-2x+1 & \text{pour} \quad 0\leqslant x<{}^1/_3\\ -{}^1/_2x+{}^1/_2 & \text{pour} \quad {}^1/_3\leqslant x<1\end{cases}$$

1° ne conserve pas la mesure,

2° satisfait aux conditions (B) et (N)

(ce qui est une conséquence facile de l'identité $\psi^2(x)=x$).

En modifiant cet exemple, on peut définir comme suit une transformation indécomposable χ ayant les propriétés 1° et 2°: $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$ étant respectivement les transformations linéaires des segments $\langle 0,{}^1/_3\rangle$ et $\langle {}^1/_3,1\rangle$ en segment $\langle 0,1\rangle$, et α — la transformation définie p. 110 (où ξ est rationnel), soit

$$\chi(x)=\begin{cases}\lambda_2^{-1}\alpha\lambda_2\psi(x) & \text{pour} \quad 0\leqslant x<{}^1/_3,\\ \lambda_1^{-1}\alpha\lambda_1\psi(x) & \text{pour} \quad {}^1/_3\leqslant x<1\end{cases}$$

(voir fig. 3 et 4, p. 121; les transformations ψ et χ sont de Marczewski).

Dunford et Miller [5] ont formulé la condition suivante pour une transformation mesurable φ:

(DM) *Il existe un K réel tel que*

$$^1/_n\sum_{j=1}^{n}\mu[\varphi^{-j}(E)]\leqslant K\cdot\mu(E)$$

pour tout ensemble E mesurable par μ.

Ils ont constaté, par un théorème que F. Riesz a qualifié "most surprising", que cette condition est nécessaire et suffisante pour que la transformation φ satisfasse à la thèse du théorème ergodique moyen. Plus précisément:

XII. *Pour les transformations φ conservant la mesure nulle, les conditions* (DM) *et* (N) *sont équivalentes et entraînent la condition* (B).

La démonstration de Dunford et Miller est assez longue et fait usage des notions et des théorèmes profonds de l'Analyse fonctionnelle.

On peut, évidemment, demander si la condition (B) est en effet essentiellement plus faible que la condition (N). Dowker [4] a construit une transformation mesurable φ qui ne satisfait pas à (N), mais qui satisfait à la condition suivante, plus faible que (B):

(B*) *Pour toute fonction f intégrable, la suite des moyennes Φ_n converge presque partout.*

Ryll-Nardzewski est parvenu récemment à modifier l'exemple de Dowker de manière qu'il satisfasse à (B) sans satisfaire à (N).

5. Théorème ergodique individuel généralisé et théorie ergodique des fractions continues. Comme le font voir les considérations qui précèdent, chaque application des théorèmes ergodiques exigeait qu'on introduise une transformation mesurable, convenablement construite. En vue d'appliquer les théorèmes ergodiques aux fractions continues, Marczewski a introduit une transformation δ, analogue à β et γ:

$\delta(x)=R(1/x)$, c'est-à-dire $\delta\left(\frac{1|}{|n_1}+\frac{1|}{|n_2}+\frac{1|}{|n_3}+\ldots\right)=\frac{1|}{|n_2}+\frac{1|}{|n_3}+\frac{1|}{|n_4}+\ldots$

(voir fig. 5, p. 121) et, cette transformation ne conservant pas la mesure de Lebesgue, il a posé la question, si elle satisfait à la condition (DM). Au cours de la première phase dés recherches consacrées à ces problèmes, Hartman a formulé la condition suivante, plus faible que (DM):

(H) *Il existe un K réel tel que*

$$\lim_n {}^1/_n \sum_{j=1}^{n} \mu[\varphi^{-j}(E)] \leqslant K\cdot\mu(E)$$

pour tout ensemble E mesurable par μ.

Il résulte des propriétés connues des fractions continues que la transformation δ satisfait à cette condition.

La condition (H) s'est montrée d'importance pour les généralisations des théorèmes ergodiques. Ainsi Ryll-Nardzewski a établi récemment le théorème:

XIII. *Pour les transformations φ conservant la mesure nulle, les conditions* (H) *et* (B) *sont équivalentes* [7].

Le rôle de la condition (H) par rapport au théorème ergodique individuel est donc analogue à celui de la condition (DM) par rapport au théorème ergodique moyen.

La démonstration de XIII n'est pas compliquée et le théorème de Dunford et Miller se laisse établir à son aide. La démonstration de l'implication (H)$\to$(B) s'appuie sur le lemme suivant, lié aux ideés que Dowker a employé dans son travail [3] précité:

Si la transformation φ satisfait à la condition (H) *par rapport à la mesure μ, il existe une mesure ν telle que*

(i) *φ conserve ν,* (ii) $\nu(E)\leqslant K\cdot\mu(E)$,

(iii) *si l'ensemble E est invariant par rapport à la mesure μ, on a $\mu(E)=\nu(E)$.*

La mesure ν est définie par la formule

$$\nu(E)=\operatorname*{Lim}_n\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\mu[\varphi^{-j}(E)]\right\},$$

où Lim désigne la limite généralisée au sens de Banach et Mazur [8] et qui d'ailleurs coïncide dans ce cas avec la limite ordinaire, puisque — comme on le constate au cours de la démonstration — la suite considérée est toujours convergente.

Les applications des théorèmes ergodiques aux fractions continues ont pris une marche différente de celle à laquelle on s'attendait d'abord: on a bientôt constaté que l'on peut y appliquer les théorèmes ergodiques I-IV, c'est-à-dire ceux sur les transformations conservant la mesure. Il est vrai que la transformation δ ne conserve pas la mesure de Lebesgue, mais on peut — ce qu'a fait Ryll-Nardzewski en profitant d'une idée de Gauss (cf. P. Lévy [18], p. 298) — définir sur le segment $\langle 0,1\rangle$ une autre mesure, à savoir

$$\nu(E)=\frac{1}{\log 2}\int_E\frac{dx}{1+x},$$

que δ conserve [9]. Il suffit évidemment de le démontrer pour le segment $\langle 0,a\rangle$, ce qui revient (voir fig. 5, p. 121) à vérifier l'identité

$$\int_0^a\frac{dx}{1+x}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{n+a}}^{\frac{1}{n}}\frac{dx}{1+x}.$$

$|E|$ désignant la mesure lebesguienne de l'ensemble E, l'inégalité évidente

$$\frac{1}{2\log 2}|E|\leqslant\nu(E)\leqslant\frac{1}{\log 2}|E|$$

implique que la classe des ensembles de mesure nulle, celle des fonctions intégrables et la convergence en moyenne sont les mêmes pour la mesure de Lebesgue et pour la mesure ν. Ajoutons en passant que la conservation de ν par δ et l'inégalité qui précède impliquent immédiatement que δ satisfait à la condition (DM) par rapport à la mesure de Lebesgue.

Knopp ([15], p. 421-423, Satz 11) a établi un théorème qui, traduit en langage de la théorie ergodique, exprime l'indécomposabilité de la transformation δ par rapport à la mesure de Lebesgue. Cette transformation est par conséquent indécomposable aussi par rapport à la mesure ν. On peut donc appliquer à la transformation δ et à la mesure ν les théorèmes ergodiques I-III.

[7] Résultat présenté par l'auteur à la Section de Wrocław de la Société Polonaise de Mathématique (séance du 10. III. 1950).

[8] Banach [1], p. 34.

[9] Résultat présenté par l'auteur à la Section de Wrocław de la Société Polonaise de Mathématique (séance du 31. III. 1950).

C'est ainsi que Ryll-Nardzewski a établi la généralisation suivante d'un théorème de Khintchine (voir [14], p. 279):

XIV. *Pour toute fonction f intégrable au sens de Lebesgue, la suite des moyennes*

$$\Delta_n(x) = {}^1/_n\{f(x)+f[\delta(x)]+\ldots+f[\delta^{n-1}(x)]\}$$

converge presque partout, et en moyenne, vers

$$\frac{1}{\log 2}\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}\,dx.$$

Posons pour tout x irrationnel du segment $\langle 0,1\rangle$

$$x = \frac{1|}{|n_1(x)} + \frac{1|}{|n_2(x)} + \ldots$$

En choisissant convenablement la fonction f, on tire de XIV divers théorèmes sur les fractions continues, en particulier les trois suivants, dont le premier appartient à P. Lévy ([18], p. 311-313) et le deuxième est dû à Khintchine ([13], p. 376):

Pour presque tout x du segment $\langle 0,1\rangle$:

XV. *Tout nombre naturel p apparaît dans la suite $\{n_i(x)\}_{i=1,2,\ldots}$ avec la fréquence*

$$\frac{1}{\log 2}\log\frac{(p+1)^2}{p(p+2)}.$$

XVI. $$\lim_k \sqrt[k]{n_1(x)\cdot n_2(x)\cdot\ldots\cdot n_k(x)} = \text{const.}$$

XVII. $$\lim_k {}^1/_k[n_1(x)+n_2(x)+\ldots+n_k(x)] = +\infty.$$

Pour démontrer XV, il suffit d'appliquer le théorème XIV à la fonction caractéristique f de l'ensemble de tous les x pour lesquels $n_1(x)=p$; pour démontrer XVI, on n'a qu'à l'appliquer à la fonction $f(x)=\log n_1(x)$; enfin, Hartman déduit XVII en posant $f(x)=n_1(x)$ dans le théorème XIV, étendu préalablement à l'aide du théorème IV au cas où $\int f(x)dx=+\infty$.

Ainsi, l'appareil arithmétique bien compliqué et qui est d'usage courant dans la théorie métrique des fractions continues (voir, par exemple, Khintchine [13, 14] et Koksma [16]), se trouve réduit, dans les cas importants qui précèdent, au théorème précité de Knopp.

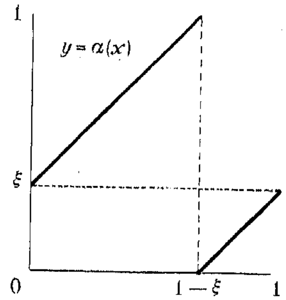

Fig. 1.

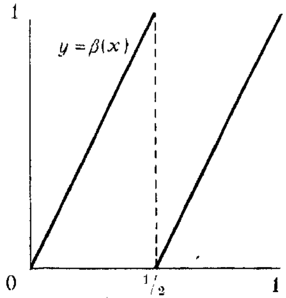

Fig. 2.

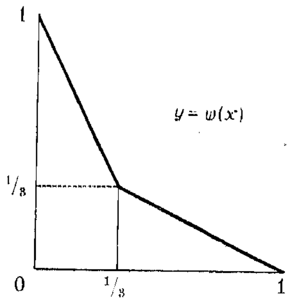

Fig. 3.

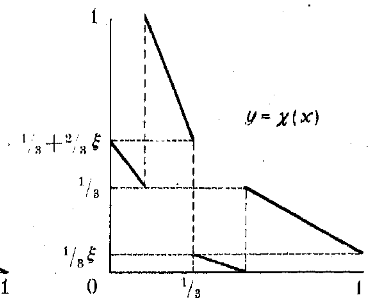

Fig. 4.

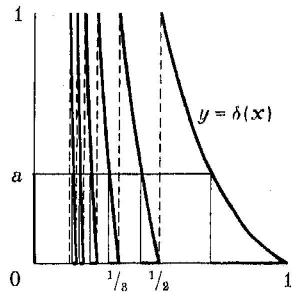

Fig. 5.

TRAVAUX CITÉS

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne I, Warszawa 1932.

[2] J. L. Doob, *The law of large numbers for continuous stochastic processes*, Duke Mathematical Journal 6 (1940), p. 290-307.

[3] Y. N. Dowker, *Invariant measure and the ergodic theorem*, Duke Mathematical Journal 14 (1947), p. 1051-1061.

[4] — *A note on the ergodic theorems*, Bulletin of the American Mathematical Society 55 (1949), p. 379-383.

[5] N. Dunford and D. S. Miller, *On the ergodic theorem*, Transactions of the American Mathematical Society 60 (1946), p. 538-549.

[6] M. Fréchet, *Une application des fonctions asymptotiquement presque-périodiques à l'étude des familles de transformations ponctuelles et au problème ergodique*, Revue Scientifique 79 (1941), p. 407-417.

[7] — *Sur le problème ergodique*, Revue Scientifique 81 (1943), p. 155-157.

[8] P. R. Halmos, *Measure Theory*, New York 1950.

[9] — *Measurable transformations*, Bulletin of the American Mathematical Society 55 (1949), p. 1015-1034.

[10] A. Khintchine, *Eine arithmetische Eigenschaft der summierbaren Funktionen*, Recueil Mathématique de Moscou 41 (1934), p. 11-13.

[11] — *Zur mathematischen Begründung der statistischen Mechanik*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 13 (1933), p. 101-103.

[12] — *Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse*, Mathematische Annalen 109 (1934), p. 604-615.

[13] — *Metrische Kettenbruchprobleme*, Compositio Mathematica 1 (1935), p. 359-382.

[14] — *Zur metrischen Kettenbruchtheorie*, Compositio Mathematica 3 (1936), p. 276-285.

[15] K. Knopp, *Mengentheoretische Behandlung einiger Probleme der diophantischen Approximationen und der transfiniten Wahrscheinlichkeiten*, Mathematische Annalen 95 (1926), p. 409-426.

[16] J. F. Koksma, *Diophantische Approximationen*, Ergebnisse der Mathematik IV, 4, Berlin 1936.

[17] A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Ergebnisse der Mathematik II, 3, Berlin 1933.

[18] P. Lévy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Monographies des probabilités I, Paris 1937.

[19] D. Raïkov, *On some arithmetical properties of summable functions*, Recueil Mathématique de Moscou, nouvelle série 1 (1936), p. 377-384.

[20] F. Riesz, *Sur la théorie ergodique*, Commentarii Mathematici Helvetici 17 (1944-1945), p. 221-239.

[21] — *On a recent generalisation of G. D. Birkhoff's ergodic theorem*, Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged 11 (1948), p. 193-200.

[22] H. Steinhaus, *Sur les distances des points des ensembles de mesure positive*, Fundamenta Mathematicae 1 (1920), p. 93-104.

[23] — *Sur les fonctions indépendantes (VIII). Loi des grands nombres, suites indépendantes, suites aléatoires*, Studia Mathematica 11 (1949), p. 133-144.

[24] H. Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins*, Mathematische Annalen 77 (1916), p. 313-352.

Państwowy Instytut Matematyczny
Institut Mathématique de l'État.