REMARQUES SUR LA DÉCOMPOSITION DES NOMBRES EN SOMMES DES CARRÉS DE NOMBRES IMPAIRS

PAR

W. SIERPIŃSKI (VARSOVIE)

M. Turski a publié [1]) une démonstration du théorème T suivant:

***T.** Tout nombre naturel est somme de dix ou moins carrés de nombres impairs* [2]).

M. Turski déduit le théorème T du suivant théorème G de Gauss:

***G.** Tout nombre naturel de la forme $8k+3$ est somme de trois carrés de nombres impairs.*

La démonstration de l'implication $G\rightarrow T$ est très simple. En effet, il résulte de G que, pour $r=3,4,\ldots,10$, tout nombre naturel de la forme $8k+r=8k+3+(r-3)\cdot 1^2$ est somme de r carrés impairs.

La démonstration du théorème G n'étant pas facile, on serait tenté de chercher une démonstration plus élémentaire du théorème T, par exemple d'essayer de le déduire du théorème L de Lagrange, d'après lequel tout nombre naturel est somme de quatre carrés de nombres entiers.

Or, je vais démontrer que *les théorèmes T et G sont équivalents* dans ce sens que chacun d'eux peut être facilement déduit de l'autre. L'implication $G\rightarrow T$ ayant été établie, il suffit d'établir l'implication $T\rightarrow G$.

Admettons donc la proposition T et considérons un nombre naturel de la forme $8k+3$. D'après T, il existe un nombre naturel $r\leqslant 10$ et r nombres impairs $n_1, n_2, \ldots, n_r$ tels que

$$8k+3=n_1^2+n_2^2+\ldots+n_r^2. \tag{1}$$

[1]) S. Turski, Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 1933, p. 70-71.

[2]) D'après L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, vol. II, New York 1934, p. 22, ce théorème est dû à F. Pollock (voir Proceedings of the Royal Society 5, London 1851, p. 922-924).

Or, on a $m^2\equiv 1 \pmod 8$ pour tout nombre impair m; on a donc $3\equiv r \pmod 8$ d'après (1); vu que $1\leqslant r\leqslant 10$, cela donne tout de suite l'égalité $r=3$. Ainsi (1) entraîne $8k+3=n_1^2+n_2^2+n_3^2$, c'est-à-dire le théorème G. L'implication $T\rightarrow G$ se trouve donc démontrée.

On a ainsi l'équivalence $T\rightleftarrows G$ et on voit que la voie choisie par M. Turski pour démontrer le théorème T était la plus naturelle.

Or, il est peut être intéressant que le théorème T, restreint aux nombres naturels qui ne sont pas de la forme $8k+3$, peut être déduit sans peine du théorème L.

En effet, soit d'abord n un nombre naturel de la forme $8k+4$. D'après L, n est somme de quatre carrés de nombres entiers et, comme $n\equiv 4 \pmod 8$, on voit que ces quatre nombres sont ou bien tous impairs, ou bien tous pairs. S'ils sont tous pairs, on a

$$8k+4=(2a)^2+(2b)^2+(2c)^2+(2d)^2, \tag{2}$$

où a, b, c, d sont des entiers.

Il résulte de (2) que

$$2k+1=a^2+b^2+c^2+d^2;$$

parmi les nombres a, b, c, d il y a donc un nombre impair de nombres impairs. Par conséquent, les nombres $a\pm b\pm c\pm d$ sont impairs, quelle que soit la combinaison des signes $+$ et $-$. On vérifie sans peine l'identité

$$\begin{aligned}(2a)^2+(2b)^2+(2c)^2+(2d)^2&=\\=(a+b+c+d)^2+(a+b-c-d)^2&+(a-b+c-d)^2+(a-b-c+d)^2;\end{aligned} \tag{3}$$

d'après (2) et (3) nous en concluons que *tout nombre naturel de la forme $8k+4$ est somme de quatre carrés de nombres impairs.*

Le théorème réciproque est aussi vrai: *toute somme de quatre carrés de nombres impairs est de la forme $8k+4$* (car tout carré d'un nombre impair est congruent à $1 \pmod 8$). On voit aussi sans peine qu'un nombre de la forme $8k+4$ n'est pas somme de moins que quatre carrés de nombres impairs.

Vu que $8k+5=(8k+4)+1^2$, nous concluons ensuite que *tout nombre naturel de la forme $8k+5$ est somme de cinq (mais pas moins) carrés de nombres impairs et réciproquement.*

Ce théorème a été démontré en 1884 par Minkowski par une voie beaucoup plus compliquée[3]).

Nous concluons pareillement que *pour qu'un nombre naturel soit somme de six, respectivement de sept carrés de nombres impairs, il faut et il suffit qu'il soit de la forme* $8k+6$, *respectivement de la forme* $8k+7$.

Comme $8k=8(k-1)+8$, on arrive au théorème suivant: *pour qu'un nombre naturel soit somme de huit carrés de nombres impairs, il faut et il suffit qu'il soit de la forme* $8k$ — théorème qui a été démontré en 1888 par Berdellé [4]) et que l'on peut aussi déduire directement du théorème L à l'aide de l'identité

$$8(a^2+b^2+c^2+d^2)+8=(2a+1)^2+(2a-1)^2+(2b+1)^2+(2b-1)^2 \\ +(2c+1)^2+(2c-1)^2+(2d+1)^2+(2d-1)^2 \text{ [5]).}$$

Vu que $8k+1=8(k-1)+9$, on conclut ensuite que *pour qu'un nombre naturel soit somme de neuf carrés de nombres impairs, il faut et il suffit qu'il soit de la forme* $8k+1$, *où* $k>0$. Or, un nombre de la forme $8k+1$ peut être carré d'un nombre impair, à savoir pour $k=\frac{n(n+1)}{2}$, où $n=0,1,2,\dots$

Comme $8k+2=8(k-1)+10$, on conclut que *pour qu'un nombre naturel soit somme de dix carrés de nombres impairs, il faut et il suffit qu'il soit de la forme* $8k+2$, *où* $k>0$.

D'autre part, un nombre de la forme $8k+2$ peut être somme de deux carrés de nombres impairs, pour $k=0,1,2,3,4,6,7,9,10$ par exemple. Mais, pour $k=5,8,14$, le nombre $8k+2$ n'est pas somme de moins que dix carrés de nombres impairs. On peut démontrer que pour qu'un nombre de la forme $8k+2$ ne soit pas somme de moins que dix carrés de nombres impairs, il faut et il suffit que, dans sa décomposition en facteurs premiers, au moins un nombre premier de la forme $4t+3$ figure en puissance impaire. Tels sont, par exemple, tous les nombres $2\cdot 7\cdot 3^{2n-1}$, où $n=1,2,3,\dots$

[3]) Voir H. Minkowski, *Gesammelte Abhandlungen I* (1911), p. 118-119 et 133-134; cf. aussi L. E. Dickson, loco citato, p. 312.

[4]) C. Berdellé, Bulletin de la Société Mathématique de France 17 (1888-9), p. 102 et 205.

[5]) Cf. L. E. Dickson, loco citato, p. 313.

Enfin, vu que $8k+3=8(k-1)+11$, nous concluons que *tout nombre naturel de la forme* $8k+3$, *où* $k>0$, *est somme de onze carrés de nombres impairs.*

On déduit ainsi du théorème L que tout nombre naturel est somme de onze ou moins que onze carrés de nombres impairs.

Or, la formule

$$8n+11=\sum_{i=1}^{11}(2k_i+1)^2$$

donne tout de suite

$$n=\sum_{i=1}^{11}\frac{k_i(k_i+1)}{2},$$

ce qui prouve que *tout nombre naturel est somme de onze nombres triangulaires non-négatifs.* Cette proposition, due à F. Pollock[6]), peut donc être déduite du théorème L. On y peut évidemment remplacer le nombre 11 par chacun des nombres 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 et, d'après le théorème G, aussi par le nombre 3.

[6]) Voir L. E. Dickson, loco citato, p. 22.