SUR UNE CONDITION SUPPLÉMENTAIRE DANS LES APPROXIMATIONS DIOPHANTIQUES

PAR

S. HARTMAN (WROCŁAW)

S. Mazur m'a posé la question suivante: avec quel ordre d'exactitude les nombres irrationnels se laissent-ils approcher par des fractions rationnelles u/v, les entiers u et v appartenant à une progression arithmétique donnée d'avance?

En voici la réponse:

Théorème. Soit $\xi>0$ un nombre irrationnel. Quels que soient les entiers $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ et $s>0$, il existe une infinité de couples de nombres naturels u,v satisfaisant aux conditions:

(1) $$\left|\xi-\frac{u}{v}\right|<\frac{2s^2}{v^2},$$

(2) $$u\equiv a\ (\mathrm{mod}\ s),\qquad v\equiv b\ (\mathrm{mod}\ s).$$

Ce théorème montre que le meilleur ordre d'exactitude, restreint par (2), de l'approximation diophantique de ξ est au moins aussi bon que celui admissible *pour tous les nombres irrationnels* sans la restriction (2). Cette restriction ne se manifeste, en effet, que par le facteur constant $2s^2$ dans (1), qui, en supprimant (2), peut être remplacé par une constante pas plus petite que $1/\sqrt{5}$ [1]) et valable pour tous les ξ irrationnels à la fois.

Démonstration. Soit $\left\{\frac{p_i}{q_i}\right\}$ la suite des réduites du développement de ξ en fraction continue. Extrayons-en (ce qui est toujours possible) une suite infinie partielle $\left\{\frac{p_{i_k}}{q_{i_k}}\right\}$ de manière à avoir

$$\left|\xi-\frac{p_{i_k}}{q_{i_k}}\right|<\frac{1}{2q_{i_k}^2}\qquad \text{pour tout } k=1,2,\ldots$$

[1]) A. Hurwitz, *Über die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche*, Mathematische Annalen 39 (1891), p. 279-284.

Fixons un k et admettons que l'indice i_k est pair (dans le cas contraire le raisonnement serait analogue). Posons

(3) $$i_k=n+1.$$

Alors

(4) $$p_nq_{n+1}-q_np_{n+1}=1,$$

(5) $$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}<\xi<\frac{p_n}{q_n},$$

(6) $$\xi-\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}<\frac{1}{2q_{n+1}^2}.$$

Le système des congruences

$$p_nx+p_{n+1}y\equiv a\ (\mathrm{mod}\ s),\qquad q_nx+q_{n+1}y\equiv b\ (\mathrm{mod}\ s)$$

admet en vertu de (4) les solutions en valeurs entières:

$$x\equiv aq_{n+1}-bp_{n+1}\ (\mathrm{mod}\ s),\qquad y\equiv bp_n-aq_n\ (\mathrm{mod}\ s).$$

Choisissons-en une solution particulière, en posant:

$x=s$ ou bien $x=$reste mod s de $[aq_{n+1}-bp_{n+1}]$,

$y=s$ ou bien $y=$reste mod s de $[bp_n-aq_n]$,

suivant que le reste en question est égal à 0 ou ne l'est pas. On a par suite:

(7) $$0<x\leqslant s,\qquad 0<y\leqslant s.$$

Posons pour les valeurs x et y ainsi fixées:

(8) $$u_n=p_nx+p_{n+1}y,$$

(9) $$v_n=q_nx+q_{n+1}y.$$

Les entiers u_n,v_n satisfont à la condition (2).

En même temps, comme $q_{n+1}>q_n$, on a d'après (7) et (9)

(10) $$\frac{v_n}{2s}\leqslant q_{n+1}$$

et en vertu de (8), (9) et (4)

(11) $$\frac{u_n}{v_n}-\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{x}{q_{n+1}v_n},$$

$$\frac{u_n}{v_n}-\frac{p_n}{q_n}=-\frac{y}{q_nv_n},$$

donc en particulier

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} < \frac{u_n}{v_n} < \frac{p_n}{q_n}. \tag{12}$$

Deux cas sont possibles:

1° $\left|\xi - \frac{u_n}{v_n}\right| \leqslant \xi - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ et alors, en vertu de (6),

$$\left|\xi - \frac{u_n}{v_n}\right| < \frac{1}{2q_{n+1}^2},$$

2° $\left|\xi - \frac{u_n}{v_n}\right| > \xi - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ et alors, en vertu de (5), (12) et (11),

$$\left|\xi - \frac{u_n}{v_n}\right| = \frac{u_n}{v_n} - \xi < \frac{u_n}{v_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{x}{q_{n+1}v_n}.$$

En tenant compte de (7) et (10), on a donc dans les deux cas

$$\left|\xi - \frac{u_n}{v_n}\right| < \frac{2s^2}{v_n^2}.$$

Les entiers u_n et v_n satisfont donc à la condition (1).

L'indice k dans (3) étant arbitraire, les conditions (1) et (2) se trouvent ainsi satisfaites pour une infinité de valeurs naturelles de u et v, c. q. f. d.

Il est à remarquer que l'exposant 2 dans le numérateur du membre droit de (1) ne peut pas être diminué; pour s'en convaincre, il suffit de poser $a=b=0$ dans (2) [2].

Le théorème démontré permet de résoudre le problème que j'avais proposé au sujet des limites supérieures et inférieures des suites $\{(\sin n)^n\}$ et $\{(\cos n)^n\}$ [3]) et qui revient essentiellement au même que celui de déterminer ces limites pour les suites $\{(\sin an)^n\}$ et $\{(\cos an)^n\}$, a étant un nombre incommensurable avec π. C'est sous cette forme que V. Jarník [4]) l'a résolu en montrant que

$$\liminf\, (\sin an)^n = \liminf\, (\cos an)^n = -1$$

(les limites supérieures, dont chacune est égale à 1, ayant été

[2]) Cette remarque est due à J. G.-Mikusiński.

[3]) Colloquium Mathematicum 1 (1947-1948), p. 33, **P 15.**

[4]) Ibidem, p. 331, **P 15, R 2.**

trouvées antérieurement [5])). La méthode par laquelle le théorème qui précède vient d'être démontré n'est en effet qu'une généralisation de la sienne.

Déduisons de ce théorème l'égalité $\liminf (\sin an)^n = -1$, par exemple. Il implique, en particulier, l'existence d'une suite infinie de solutions entières u_i, v_i de l'inégalité

$$\left|\frac{\pi}{2a} - \frac{u_i}{v_i}\right| < \frac{2\cdot 4^2}{v_i^2}, \tag{13}$$

assujetties aux conditions:

$$u_i \equiv 3 \pmod 4, \tag{14}$$

$$v_i \equiv 3 \pmod 4. \tag{15}$$

On a $|v_i\frac{\pi}{2} - au_i| = O\left(\frac{1}{v_i}\right) = O\left(\frac{1}{u_i}\right)$ en vertu de (13), d'où en tenant compte de (15), $\sin au_i = -1 + O\left(\frac{1}{u_i^2}\right)$ et par conséquent

$$(\sin au_i)^{u_i} = \left[-1 + o\left(\frac{1}{u_i}\right)\right]^{u_i}.$$

En vertu de (14), le membre droit de cette égalité tend évidemment vers -1, c. q. f. d.

Le cas de $\liminf (\cos an)^n$ et celui des limites supérieures sont analogues.

[5]) Ibidem, p. 149, **P 15, R 1.**