PRINTED IN POLAND

Nakład 1500 egz. Papier bezdrz. sat. 100 g 70×100 cm.
Druk ukończono w czerwcu 1952 r.

ZAM. 18/860/50 — WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA — F-1-11084

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. II WROCŁAW 1949 FASC. 1

COMMUNICATIONS

SUR UNE ÉQUIVALENCE POUR LES FONCTIONS

PAR

B. KNASTER (WROCŁAW)

Soit $M(x,y)$ une fonction réelle de deux variables réelles.

Aczél a montré [1]) que si elle est à la fois:

(i) croissante (par rapport à chacune des variables),
(ii) continue (par rapport à leur couple),
(iii) bisymétrique: $M[M(x,y),M(z,u)]=M[M(x,z),M(y,u)]$,
(iv) réflexive: $M(x,x)=x$,
(v) symétrique: $M(x,y)=M(y,x)$,

il existe une fonction f (continue et croissante) telle que

$$M(x,y)=f^{-1}\left[\frac{f(x)+f(y)}{2}\right].$$

Ryll-Nardzewski a montré de sa part [2]) que la fonction $M(x,y)$ est de la même forme lorsqu'elle est (i),

(1) continue pour tout couple $0,y$,
(2) *distributive en soi* [3]): $M[x,M(y,z)]=M[M(x,y),M(z,x)]$.

Les réciproques des deux théorèmes étant manifestement vraies et leur thèse étant commune, il y a équivalence entre leurs hypothèses, à savoir entre la réunion des propriétés (i)-(v) et celle des propriétés (i), (1) et (2). Le problème s'impose donc, s'il y a équivalence formelle directe, et sous quelles conditions, entre la réunion des *formules* (iii) (iv) (v) et la *formule* (2) seule.

La réponse [4]) est affirmative déjà sous la condition (i), même en remplaçant les variables numériques par des variables parcourant un ensemble ordonné quelconque, donc sans que la notion

[1]) J. Aczél, *On mean values*, Bulletin of the American Mathematical Society 54 (1948), p. 392-400.

[2]) C. Ryll-Nardzewski, *Sur les moyennes*, Studia Mathematica 11 (1949), p. 31-37.

[3]) (*selfdistributive*); j'appelle ainsi cette propriété. La formule est due à J. G.-Mikusiński.

[4]) Elle a été l'objet de ma communication à la séance commune du VII Congrès Polonais et III Congrès Tchécoslovaque de Mathématique à Prague le 29 août 1949.

de continuité, par exemple, y soit pour quelque chose. La condition (i) est d'ailleurs (ce qui est évidemment moins intéressant) superflue dans l'une [5]) et se laisse atténuer quelque peu dans d'autres implications qui forment l'équivalence en question. Ce qui me semble, par contre, plus intéressant et conforme à la nature des choses, c'est la complexité du calcul à faire pour déduire (iii) de (2) et dans lequel la quatrième itération de (2) paraît essentielle.

Désignons par $\rightarrow$ l'implication et par $<$ l'ordination des éléments de l'ensemble parcouru par les variables, les valeurs de la fonction M appartenant par définition au même ensemble. Aussi, pour abréger l'écriture, supprimons désormais le signe de fonction devant les parenthèses et les virgules entre ceux de variables.

Les formules à considérer prennent alors la forme:

(iii) bisymétrie: $[(xy)(zu)]=[(xz)(yu)]$,
(iv) réflexivité: $(xx)=x$,
(v) symétrie: $(xy)=(yx)$,
(2) distributivité en soi: $[x(yz)]=[(xy)(zx)]$.

Il s'agit de déduire de (i) l'équivalence

$$\text{(iii)}\,\text{(iv)}\,\text{(v)} \rightleftarrows (2),$$

ce qui revient évidemment à démontrer les implications:

I. (iii) (iv) (v) $\rightarrow$ (2), II. (2) $\rightarrow$ (iv), III. (2) $\rightarrow$ (v) [6]),
IV. (2) $\rightarrow$ (iii),

en admettant au besoin l'hypothèse (i).

La démonstration de I n'exige pas cette hypothèse. Remplaçons x, y, z et u par x, x, y et z respectivement. La formule (iii) devient alors $[(xx)(yz)]=[(xy)(xz)]$, d'où $[x(yz)]=[(xy)(xz)]$ en vertu de (iv). Il en résulte la formule (2) par l'application de (v) à (xz).

La démonstration de II n'exige, au lieu de l'hypothèse (i), que la croissance par rapport à l'une des variables, plus précisément sa conséquence triviale

$$[(\xi\zeta)=(\zeta\zeta)]\rightarrow(\xi=\zeta). \tag{3}$$

[5]) C. Ryll-Nardzewski, loco citato, p. 32.

[6]) Les démonstrations de I-III sont banales et signalées comme telles par Ryll-Nardzewski, ibidem.

En effet, (2) entraîne $[x(xx)]=[(xx)(xx)]$ pour $x=y=z$, d'où la formule (iv) par l'application de (3) à $\xi=x$ et $\zeta=(xx)$.

La démonstration de III n'exige que la conséquence triviale

$$[(\xi\zeta_1)=(\xi\zeta_2)]\rightarrow(\zeta_1=\zeta_2) \tag{4}$$

de la croissance par rapport à l'une des variables. En effet, remplaçons x, y et z par x, x et y respectivement. La formule (2) devient alors $[x(xy)]=[(xx)(yx)]$. Reste à appliquer (iv), qui résulte de (2) en vertu de II, et enfin (4) pour $\xi=x$, $\zeta_1=(xy)$ et $\zeta_2=(yx)$.

La démonstration de IV exige l'hypothèse (i), mais qui revient — cette fois par suite de III, à savoir en vertu de la symétrie (v) — encore à n'admettre que la croissance par rapport à l'une des variables. Et on peut évidemment, en vertu de II et III, appliquer à volonté les conséquences (iv) et (v) de (2). Plus précisément, la conséquence suivante de (i), (iv) et (2) sera appliquée:

$$\begin{matrix}\{\xi_1=(\alpha\beta)=[(\xi_2\alpha)(\xi_3\beta)]\}\\ \{\xi_3=(\gamma\delta)=[(\xi_1\gamma)(\xi_2\delta)]\}\end{matrix}\longrightarrow(\xi_1=\xi_2). \tag{5}$$

Elle se démontre comme suit. Les égalités $\xi_1=(\alpha\beta)$ et $\xi_3=(\gamma\delta)$ entraînent d'après (iv) respectivement les égalités $(\alpha\beta)=[\xi_1(\alpha\beta)]$ et $(\gamma\delta)=[\xi_3(\gamma\delta)]$, d'où en vertu de (2)

$$(\alpha\beta)=[(\xi_1\alpha)(\xi_1\beta)],\qquad(\gamma\delta)=[(\xi_3\gamma)(\xi_3\delta)],$$

et les prémisses de (5) deviennent

$$[(\xi_1\alpha)(\xi_1\beta)]=[(\xi_2\alpha)(\xi_3\beta)], \tag{6}$$

$$[(\xi_3\gamma)(\xi_3\delta)]=[(\xi_1\gamma)(\xi_2\delta)]. \tag{7}$$

En supposant donc que $\xi_2<\xi_1$, il vient $(\xi_2\alpha)<(\xi_1\alpha)$ d'après (i), d'où $(\xi_1\beta)<(\xi_3\beta)$ d'après (i) et (6), donc $\xi_1<\xi_3$ d'après (i), ce qui entraîne — par le même raisonnement, mais avec (7) au lieu de (6) — que $\xi_3<\xi_2$, contrairement à $\xi_2<\xi_1<\xi_3$. En supposant que $\xi_1<\xi_2$, la contradiction est symétrique. Ainsi (5) est établi.

Il suffit donc, pour démontrer IV, de déduire de (2) une représentation des deux membres de (iii):

$$\xi_1=[(xy)(zu)]\qquad\text{et}\qquad\xi_2=[(xz)(yu)], \tag{8}$$

qui satisfasse aux prémisses de (5).

On a d'abord pour ξ_1 par l'application itérée de (2) et (v):

$$(9)\qquad [(xy)(zu)] = \{[x(zu)][y(zu)]\} = \{[(xz)(xu)][(yz)(yu)]\} = \\ = \{[(xz)(ux)][(zy)(yu)]\},$$

$$(10)\qquad [(xy)(zu)] = \{[(xy)z][(xy)u]\} = \{[(xz)(yz)][(xu)(yu)]\} = \\ = \{[(xz)(zy)][(ux)(yu)]\} = \big(\{(xz)[(ux)(yu)]\}\{(zy)[(ux)(yu)]\}\big) = \\ = \big(\{[(xz)(ux)][(xz)(yu)]\}\{[(zy)(ux)][(zy)(yu)]\}\big).$$

On a de même:

$$(11)\qquad [(zy)(ux)] = \{[(zy)u][(zy)x]\} = \{[(zy)u][x(yz)]\} = \\ = \{[(zu)(yu)][(xy)(xz)]\},$$

$$(12)\qquad [(zy)(ux)] = \{[z(ux)][y(ux)]\} = \{[(zu)(zx)][(yu)(yx)]\} = \\ = \{[(zu)(xz)][(yu)(xy)]\} = \big(\{[(zu)(xz)](yu)\}\{(xy)[(zu)(xz)]\}\big) = \\ = \big(\{[(zu)(yu)][(xz)(yu)]\}\{[(xy)(zu)][(xy)(xz)]\}\big).$$

Ainsi, en posant

$$\alpha = [(xz)(ux)], \qquad \beta = [(zy)(yu)],$$

$$\xi_3 = [(zy)(ux)],$$

$$\gamma = [(xy)(xz)], \qquad \delta = [(zu)(yu)],$$

les formules (9)-(12) deviennent d'après (8)

$$\xi_1 = (\alpha\beta) = [(\alpha\xi_2)(\xi_3\beta)], \qquad \xi_3 = (\delta\gamma) = [(\delta\xi_2)(\xi_1\gamma)].$$

Reste à appliquer (v) aux couples $\alpha\xi_2$, $\delta\gamma$, $\delta\xi_2$ et $(\delta\xi_2)(\xi_1\gamma)$ pour que ces formules prennent exactement la forme des prémisses de (5), c. q. f. d.

Państwowy Instytut Matematyczny
Institut Mathématique de l'État

A NOTE ON A THEOREM OF HELSON

BY

A. M. GLEASON * (CAMBRIDGE, MASS.)

Helson has proved the following theorem [1]):

If $\circ$ is a group operator on the subsets of a set M with zero the empty set, invariant under simple transformations, and such that $A\circ B \subset A+B$ for all subsets A, B of M, then $\circ$ is symmetric difference.

The purpose of this note is to strengthen his result by dropping the requirement about zero as the empty set and the invariance of $\circ$ under simple transformations.

Theorem. If the subsets of a set M form a group under the operation $\circ$, and if $A\circ B\subset A+B$ for all subsets A, B of M, then $\circ$ is symmetric difference.

I give the proof in six steps.

1° *The empty set 0 is the identity element of the group.*

In fact, the relation $0\circ 0\subset 0+0=0$ implies $0\circ 0=0$.

2° *If A is a one-element set, then $A^{-1}=A$.*

If A is a one-element set, the relation $A\circ A\subset A$ implies either $A\circ A=0$ or $A\circ A=A$. The latter is impossible since A is not the identity.

3° *If A is a one-element set and B is any set, then*

$$A\circ B = B\circ A = A\dot{-}B,$$

where the operator $\dot{-}$ denotes symmetric difference.

Assume to begin with that $A \text{ non}\subset B$.

Now $B=A\circ A\circ B\subset A+(A\circ B)$, hence $B\subset A\circ B$. Since A is not the identity element of the group, this inclusion is proper. Since A has only one element, one of the two inclusions $B\subset A\circ B\subset A+B$ must be improper, hence $A\circ B=A+B$.

---

* Member of the Society of Fellows of Harvard University.

[1]) Henry Helson, *On the symmetric difference of sets as a group operation*, Colloquium Mathematicum 1 (1948), p. 203-205.