COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XII 1964 FASC. 2

О ГРАНИЦЕ КАРАТЕОДОРИ

Я. ФУКА (ПРАГА)

Эта статья (¹) посвящена вопросу введения отношения близости в плоских областях конформно инвариантным образом. Из результатов теории Смирнова (см. [1]) и из теорем о существовании конформного отображения следует теорема Каратеодори о расширении конформного отображения на границу области. Основной задачей предлагаемой работы является нахождение условий, достаточных для распространения на некоторые бесконечносвязные области известной гипотезы Осгуда, доказанной лишь для жордановых областей. Из теории Смирнова следует, что для этого достаточно выделить класс областей, для которого возможно выразить обыкновенную близость, данную евклидовой метрикой, в конформно инвариантных терминах. Такой класс выделяется в теореме 3.1. Однако свойство (3), сформулированное в этой теореме, трудно проверить в конкретных случаях. Поэтому было бы важно дать более простые геометрические условия, гарантирующие выполнение этого свойства, но эта задача осталась вне рассмотрения. По тематике эта статья примыкает к работе Галя [2], в которой для введения границы римановой поверхности использован аппарат равномерных пространств.

1. Приведем основные определения и результаты вышеупомянутой теории Смирнова.

Пусть P — множество и $\mathfrak{P}$ — множество всех его подмножеств. Элементы множества P будем обозначать малыми буквами, элементы множества $\mathfrak{P}$ — большими.

Определение 1.1 (см. [1], стр. 546). Множество P называется *δ-пространством*, если на множестве $\mathfrak{P}\times\mathfrak{P}$ введено отношение μ *(δ-отношение)*, удовлетворяющее следующим требованиям:

Б1. $A\mu B \to B\mu A$,

Б2. $(A \cup B)\mu C$ тогда и только тогда, когда $A\mu C$ или $B\mu C$,

(¹) Являющаяся развитием результатов доклада, прочитанного автором на Третьей Конференции по аналитическим функциям (см. Colloquium Mathematicum 11 (1964), стр. 296, в частности стр. 288.

Б3. $p\mu q \leftrightarrow p = q$,

Б4. P nonμ $\emptyset$,

Б5. Если A nonμ B, то существуют такие множества C и D что $C \cup D = P$, A nonμ C и B nonμ D.

Будем обозначать через (P, μ) δ-пространство P с δ-отношением μ.

Определение 1.2. Отображение f δ-пространства (P, μ) в δ-пространство (Q, ν) называется *δ-отображением*, если из $A\mu B$ следует $f(A)\,\nu\, f(B)$.

Во всяком δ-пространстве можно ввести топологию, называя замыканием множества A множество всех точек y, близких к A, т. е. для которых $y\mu A$. Замыкание множества A в топологическом пространстве P обозначается через $\bar{A}^P$.

Для наших целей достаточно убедится, что в метрическом пространстве с метрикой ϱ можно ввести δ-отношение ϱ так, что $A\varrho B$ тогда и только тогда, когда $\varrho(A, B) = 0$.

Легко видеть, что топология δ-пространства (P, ϱ) и топология метрического пространства P совпадают.

В своей работе [1] Смирнов доказал два основных предложения:

Теорема 1.1. *Для всякого δ-пространства (P, μ) существует единственное бикомпактное пространство $u(P)$ со свойствами*:

(1) $\overline{(P, \mu)}^{u(P)} = u(P)$,

(2) *если* $A \subset P$ *и* $B \subset P$, *то* $A\mu B \leftrightarrow \bar{A}^{u(P)} \cap \bar{B}^{u(P)} \neq \emptyset$.

Теорема 1.2. *Всякое δ-отображение δ-пространства (P, μ) в δ-пространство (Q, ν) можно расширить до непрерывного отображения бикомпакта $u(P)$ в бикомпакт $u(Q)$.*

Из этих двух теорем следует

Теорема 1.3. *Если взаимнооднозначное отображение f δ-пространства (P, μ) на δ-пространство (Q, ν) и обратное отображение f^{-1}, являются δ-отображениями, то f можно расширить до гомеоморфного отображения бикомпакта $u(P)$ на бикомпакт $u(Q)$.*

2. Приведем теперь по Альфорсу (см. [3]) определение и основные свойства экстремальной длины системы кривых на поверхности Римана W.

Определение 2.1 (см. [3], стр. 220). Пусть Γ — непустая система кривых на римановой поверхности W, каждая из которых составлена из счетного числа дуг, т. е. непрерывных образов отрезка $0 \leqslant t \leqslant 1$. *Экстремальная длина системы Γ в W* определяется формулой

$$\lambda(\Gamma) = \sup_{\varrho} \frac{L^2(\Gamma, \varrho)}{A(W, \varrho)}.$$

где ϱ — произвольная полунепрерывная снизу плотность, не равная тождественно нулю, и

$$L(\Gamma, \varrho) = \inf_{\gamma \in \gamma} \int_{\gamma} \varrho\,|dz|, \qquad A(W, \varrho) = \iint_{W} \varrho^2 dx dy.$$

Поскольку принято, что $\inf \emptyset = +\infty$, условимся считать, что $\lambda(\Gamma) = +\infty$, если Γ — пустое множество.

Экстремальная длина $\lambda(\Gamma)$ есть конформно инвариантная величина.

Теорема 2.1 (принцип сравнения). *Пусть Γ и Γ' — непустые системы кривых на поверхности W. Если для всякой кривой $\gamma \in \Gamma$ существует такая кривая $\gamma' \in \Gamma'$, что $\gamma \supset \gamma'$, то $\lambda(\Gamma) \geqslant \lambda(\Gamma')$.*

Теорема 2.2 ([2], стр. 222). *Пусть W — кольцо $r_1 < |z| < r_2$ и Γ — множество окружностей $|z| = r$ $(r_1 < r < r_2)$ или множество всех замкнутых простых дуг, отделяющих окружности $|z| = r_1$ и $|z| = r_2$. Тогда*

$$\lambda(\Gamma) = 2\pi/\lg(r_2/r_1).$$

Определение 2.2. Пусть E_1 и E_2 — непустые множества на римановой поверхности W, и Γ — множество всех дуг, соединяющих точки E_1 и E_2. Экстремальное расстояние $\lambda(E_1, E_2)$ множеств E_1 и E_2 в W определяется формулой

$$\lambda(E_1, E_2) = \lambda(\Gamma).$$

3. Теорема 3.1. *Пусть G — ограниченная область плоскости E со свойствами:*

(1) *Замыкание $H = \overline{G}^E$ в смысле евклидовой метрики является локально связным.*

(2) *Если N — открытое и связное подмножество множества $\overline{G}^E$, то множество $N \cap G$ есть область, т. е. открыто и связно в плоскости E.*

(3) *Если точка p принадлежит границе области G в плоскости E, то в каждой открытой и связной окрестности H_p точки p в $\overline{G}^E$ существует последовательность континуумов $K_0, K_1, \ldots, K_n, \ldots$ со свойствами:*

(3_0) *$H_p \setminus K_0$ — несвязное множество,*

(3_1) *точка p и множество K_0 принадлежит различным компонентам множества $H_p \setminus K_i$ для $i = 1, 2, \ldots$*

(3_2) *если Γ_n — множество всех простых дуг, лежащих (за исключением своих концевых точек) в G и отделяющих K_n от K_0, то $\lambda(\Gamma_n) \to 0$ при $n \to \infty$.*

Для такой области G справедливо следующее утверждение:

Пусть $A \subset G$ и $B \subset G$. Тогда $\varrho(A, B) > 0$ в том и только том случае, в котором существует конечное число областей $U_i(A)$, где $i = 1, 2, \ldots, r$, и конечное число областей $V_j(B)$, где $j = 1, 2, \ldots, s$, удовлетворяющих условиям

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{r} U_i(A), \quad B \subset \bigcup_{j=1}^{s} V_j(B),$$

$$\lambda\big(U_i(A),\, V_j(B)\big) > 0 \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant r \text{ и } 1 \leqslant j \leqslant s.$$

Доказательство. Пусть сначала $\varrho(A, B) = a > 0$. Тогда и $\varrho(\bar{A}, \bar{B}) = a$, где $\bar{A}$ и $\bar{B}$ обозначают замыкания множеств A и B в $\bar{G}^E$, следовательно, и в E. Так как $\bar{G}^E$ — бикомпакт, то $\bar{A}$ и $\bar{B}$ — бикомпакты.

Пусть K открытый круг с центром в граничной точке p области G и радиусом $a/4$. В силу (1) существует открытое связное в $\bar{G}^E$ множество, содержащееся в K и содержащее точку p. Его пересечение с G является областью в силу (2). Покроем теперь множества $\bar{A}$ и $\bar{B}$ конечным числом областей этого рода и кругов. Таким образом, множество A будет покрыто конечным числом областей $U_i(A)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, а множество B конечным числом областей $V_j(B)$, $j = 1, 2, \ldots, s$, причем

$$\varrho\Big(\bigcup_{i=1}^{r} U_i(A),\, \bigcup_{j=1}^{s} V_j(B)\Big) \geqslant \frac{a}{2} > 0,$$

откуда

$$\varrho\big(U_i(A), V_j(B)\big) \geqslant \frac{a}{2} > 0 \quad \text{для всех } i, j.$$

Пусть Γ_{ij} — множество всех связных дуг γ, соединяющих точки области $U_i(A)$ с точками области $V_j(B)$. Тогда

$$L(\Gamma_{ij}, \varrho) \geqslant a/2,$$

откуда

$$\lambda\big(U_i(A),\, V_j(B)\big) \geqslant \frac{L^2(\Gamma_{ij}, \varrho)}{A(G, \varrho)} \geqslant \frac{a/2}{A(G, \varrho)} > 0.$$

Пусть теперь $\varrho(A, B) = 0$. Рассмотрим конечные системы областей $U_i(A)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ и $V_j(B)$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$, для которых

$$\bigcup_{i=1}^{r} U_i(A) \supset A \quad \text{и} \quad \bigcup_{j=1}^{s} V_j(B) \supset B.$$

Так как $\varrho(A, B) = 0$, то существует по крайней мере одна пара таких областей $U(A) = U_{i_0}(A)$ и $V(B) = V_{j_0}(B)$, что $\varrho\big(U(A),\, V(B)\big) = 0$ и, следовательно, $\varrho(\overline{U(A)}, \overline{V(B)}) = 0$. Отсюда вытекает существование точки $p \in \overline{U(A)} \cap \overline{V(B)}$.

Рассмотрим случай, когда $p \in G$. Пусть $a \in U(A)$, $b \in U(B)$, $d \leqslant |a-p|$ и $d \leqslant |b-p|$. Тогда всякая окружность γ_r радиуса r, где $0 < r < d$, пересекает $U(A)$ и $V(B)$ (так как $U(A)$ и $V(B)$ связные множества). Обозначим соответственно через a_n и b_n любые точки этих пересечений, через Γ_2 множество всех таких окружностей γ_r, через Γ_1 множество их дуг с концами в точках a_r и b_r и через Γ множество всех связных дуг, соединяющих точки множества $U(A)$ и $V(B)$. Тогда в силу принципа сравнения получаем $\lambda(\Gamma_2) \geqslant \lambda(\Gamma_1) \geqslant \lambda(\Gamma)$ и в силу теоремы 2.2 $\lambda(\Gamma_2) \leqslant 2\pi/\lg(d/r) \to 0$ при $r \to 0$. Итак $\lambda(\Gamma) = 0$.

Нам осталось рассмотреть случай, когда p принадлежит границе области G в E. Пусть $a \in U(A)$, $b \in V(B)$, $d \leqslant |a-p|$ и $d \leqslant |b-p|$. Пусть H_p — компонента множества $\{z; |p-z| < d\} \cap \overline{G}^E$ в $\overline{G}^E$, содержащая p. Она открыта в $\overline{G}^E$ в силу (1).

Рассмотрим последовательность континуумов $K_0, K_1, \ldots, K_n, \ldots$ и последовательность множеств кривых Γ_n, $n = 1, 2, \ldots$, соответствующих множеству H_p в силу свойства (3). Так как $U(A)$ и $V(B)$ — связные множества и их пересечения со всякой окрестностью точки p, а также с множеством $\overline{G}^E \setminus H_p$ непусты, то из (3_0) и (3_1) следует

$$K_i \cap U(A) \neq \emptyset \text{ и } K_i \cap V(B) \neq \emptyset \quad \text{для всех } i = 0, 1, 2, \ldots$$

Пусть теперь $\gamma_n \in \Gamma_n$. Так как в силу (3_0) K_0 и K_n принадлежат различным компонентам множества $H_p \setminus \gamma_n$, то в силу последних неравенств γ_n пересекает и $U(A)$, и $V(B)$, и поэтому содержит простую дугу $\tilde{\gamma}_n$, соединяющую точки $a_n \in U(A)$ и $b_n \in V(B)$. В силу (3_2) $\tilde{\gamma}_n$ принадлежит G. Обозначим через $\tilde{\Gamma}_n$ семейство дуг $\tilde{\gamma}_n$ и через Γ семейство всех кривых, соединяющих точки множеств $U(A)$ и $V(B)$. Тогда получаем по принципу сравнения $\lambda(\Gamma_n) \geqslant \lambda(\tilde{\Gamma}_n) \geqslant \lambda(\Gamma)$ и из (3_2) следует, что $\lambda(\Gamma) = 0$. Теорема полностью доказана.

Теорема 3.2. *Пусть G область, ограниченная конечным числом кривыя Жордана $j_0, j_1, \ldots, j_n$, из которых j_i, где $i = 1, 2, \ldots, n$, содержатся внутри j_0. Тогда G обладает свойствами* (1)-(3) *из теоремы* 3.1.

Доказательство. С помощью несложных рассуждений, опирающихся на теорему Жордана, нетрудно проверить, что G обладает свойствами (1) и (2). Докажем свойство (3). Так как хватит доказать (3) для достаточно малых окрестностей, мы можем предполагать, что G есть внутренность (в случае $p \in j_0$) или внешность (в случае $p \in j_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$) единственной кривой Жордана. Итак, пусть G — внутренность жордановой кривой j и пусть нам дана точка $p \in j$. Пусть $H_p = U_p \cap (G \cup j)$ — любая открытая и связная окрестность точки p в $G \cup j$, γ_{d_0} — окружность радиуса d_0 с центром в точке p, k_{d_0} — её внутренность, причём d_0 выбрано так, что $k_{d_0} \cup \gamma_{d_0} \subset U_p$. На границе пересечения $k_{d_0} \cap G$ лежит открытая дуга j_{d_0}, содержащая точку p.

Выберём положительное число d так, чтобы оно было меньше расстояния точки p от $j \setminus j_{d_0}$ и обозначим через γ_d окружность радиуса d с центром в точке p, а через k_d её внутренность. Фиксируем точку $q_0 \in \gamma_{d_0} \cap G$ и пусть q точка той компоненты пересечения $k_d \cap G$, граница которой содержит p. Соединим q с q_0 внутри $G \cap k_{d_0}$ простой ломаной l с конечным числом звеньев. l пересекает окружность γ_d в нечётном числе точек. Отсюда следует, что существует замкнутая дуга $a_d \subset \gamma_d$, отделяющая q от q_0. Сверх того, l можно подобрать так, что она пересечёт только a_d. Если существует ломаная l_1, соединяющая q с q_0 внутри $G \cap \kappa_{d_0}$ и пересекающая только дугу $a_1 \subset \gamma_d$, где $a_1 \neq a_d$, то мы можем её подобрать так, что $l \cup l_1$ будет простой замкнутой ломаной. Тогда по теореме Жордана её внутренность лежит в G, что невозможно, так как она необходимо содержит некоторую точку дуги j_d. Итак, $G = G_0 \cup G_1 \cup a_d$, где G_0 и G_1 суть жордановы области, на границе каждой из которых лежит a_d. Пусть, например, $q \in G_1$. Тогда p лежит на границе G_1 и $q_0 \in G_0$. Если бы на границе G_1 лежала точка из $j \setminus j_d$, то граница G_1 содержала бы всю дугу $j \setminus j_d$ и точка q_0 лежала бы в G_1, что невозможно. Итак, граница G_1 является объединением a_d и жордановой дуги $\tilde{j} \subset j_d$. Значит, в силу выбора d, $G_1 \subset \kappa_d$. Отсюда, из приципа сравнения и из теоремы 2.2 следует, что можно взять, например, $K_n = a_{d/2^n}$. Во втором случае, когда G есть внешность жордановой кривой, доказательство аналогично.

Приведем простой пример бесконечносвязной области G, обладающей свойствами (1)-(3) из теоремы 3.1.

Пусть q_n, r_n, где $n = 1, 2, \ldots,$ — последовательности положительных чисел со следующими свойствами:

$$1 > q_n > r_n > q_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{q_n} = 0.$$

G есть область, которая получается из открытого единичного круга исключением счетного числа замкнутых кругов K_i и точки $z = 0$, причем в каждом кольце $q_1 \leqslant |z| \leqslant 1$, $q_{n+1} \leqslant |z| \leqslant r_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ может лежать лишь конечное число кругов K_i и в кольце $r_n < |z| < q_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ не лежит никакой из кругов K_i.

Пусть теперь G — область, $A \subset G$ и $B \subset G$. Условимся писать $A \bar{\varkappa} B$ в случае существования конечного числа областей $U_i(A)$, где $i = 1, 2, \ldots, r$, и конечного числа областей $V_j(B)$, где $j = 1, 2, \ldots, s$, удовлетворяющих условиям

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{r} U_i(A), \quad B \subset \bigcup_{j=1}^{s} V_j(B),$$

$$\lambda\big(U_i(A),\, V_j(B)\big) > 0 \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant r \text{ и } 1 \leqslant j \leqslant s.$$

В противном случае мы будем писать $A\varkappa B$. Так как отношение $A\varrho B$, данное формулой $A\varrho B \leftrightarrow \varrho(A, B) = 0$, где $\varrho(A, B)$ — евклидово расстояние множеств A и B, является δ-отношением, то из теоремы 3.1 следует, что для областей, которые удовлетворяют условиям (1)-(3), $A\varkappa B$ есть δ-отношение.

Теорема 3.3. *Если G_1 и G_2 — ограниченные области, для которых выполнены условия* (1)-(3) *теоремы* 3.1, *и если f — конформное отображение G_1 на G_2, то его можно расширить до гомеоморфного отображения $\overline{G}_1$ на $\overline{G}_2$ (где $\overline{G}$ обозначает замыкание области G в плоскости E в смысле евклидовой метрики).*

4. Пусть в частности G — односвязная область, K — единичный круг и f — конформное отображение G на K. Определим в G отношение $\varkappa$ формулой

$$A\varkappa B \leftrightarrow f(A)\varkappa f(B).$$

Ясно, что $\varkappa$ есть δ-отношение в области G и что f является δ-отображением G на K. По теореме 1.1 существует бикомпакт $u(G)$, содержащий G в качестве плотного подмножества. По теореме 1.3 бикомпакты $u(G)$ и K гомеоморфны, так что $u(G)\setminus G$ гомеоморфно единичной окружности. Значит, $u(G)\setminus G$ есть граница Каратеодори области G и её элементы являются граничными элементами в смысле Каратеодори („Primenden"). Таким образом мы построили с помощью приведенной конструкции граничные элементы для всех n-связных и для некоторых бесконечносвязных областей.

Из теоремы 1.1 следует, что на сфере Римана можно (в силу компактности) ввести только одно δ-отношение, которое задано её метрикой. Если E — открытая плоскость, то можно легко убедиться с помощью теорем 2.1 и 2.2, что все её неограниченные подмножества близки друг к другу и что всякие два ограниченных подмножества близки тогда и только тогда, когда пересечение их замыканий непусто. Отсюда видно, что $u(E)$ тождественно сфере Римана. Заметим в заключение, что в силу общей теоремы об униформизации все результаты переносятся на римановы поверхности, подобные однолистным.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. М. Смирнов, *О пространствах близости,* Математический сборник 31(73) (1952), № 3, стр. 543-574.

[2] I. S. Gál, *Conformally invariant metrics and uniform structures,* Indagationes Mathematicae 22 (1960), стр. 218-244.

[3] L. V. Ahlfors and L. Sario, *Riemann surfaces,* Princeton 1960.

Reçu par la Rédaction le 15. 2. 1963