COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XII 1964 FASC. 2

PSEUDOGROUPE ÉLÉMENTAIRE COMMUTATIF ET SEMI-GROUPE RÉGULIER COMMUTATIF

PAR

L. DUBIKAJTIS ET P. JAREK (TORUŃ)

Ayant défini d'une manière convenable certaines nouvelles notions dans la théorie du semi-groupe régulier commutatif, nous allons démontrer l'équivalence de cette théorie à celle du pseudogroupe élémentaire commutatif, à savoir que tous les théorèmes valables dans l'une de ces théories sont valables dans l'autre. En développant ces théories, certains théorèmes y seront établis en vue de les appliquer dans nos prochains travaux.

On peut trouver la définition du semi-groupe régulier dans le livre de Liapine [5], p. 104. Dans la notation usuelle, les axiomes du semigroupe régulier sont les suivants:

S1. $\bigwedge_{x,y\in C}\bigvee_{1z\in C} z = x\circ y$,

où $\bigvee_{1x}$ veut dire qu'il existe un et un seul x.

S2. $(x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z)$.

S3. $\bigwedge_{x\in C}\bigvee_{y\in C} x\circ y\circ x = x$.

Les axiomes du pseudogroupe élémentaire (étant une généralisation du pseudogroupe d'Ehresmann [4], p. 308-310) sont les suivants (voir le système III dans [2] ou P^* dans [1]):

P1. $\bigwedge_{x,y\in C}\bigvee_{1z\in C} z = x\circ y$.

P2. $(x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z)$.

P3. $x, y\in C_0 \Rightarrow x\circ y\in C_0$.

P4. $x, y\in C_0 \Rightarrow x\circ y = y\circ x$.

P5. $x\in C_0 \Rightarrow (x\circ x = x\wedge x\in C)$.

Définition D_P1'. $y = \alpha x \Leftrightarrow [y\in C_0\wedge x\circ y = x\wedge \bigwedge_{z\in C_0}(x\circ z = x\Rightarrow y\circ z = y)]$.

Définition D_P1''. $y = \beta x \Leftrightarrow [y\in C_0\wedge y\circ x = x\wedge \bigwedge_{z\in C_0}(z\circ x = x\Rightarrow z\circ y = y)]$.

Les deux définitions sont correctes car l'existence et l'unicité de αx et de βx pour tout $x\in C$ résultent des axiomes P (cf. [4] ou [2], théorème 3.1).

P6'. $\bigwedge_{x\epsilon C}\bigvee_{y\epsilon C} y = \alpha x$.

P6''. $\bigwedge_{x\epsilon C}\bigvee_{y\epsilon C} y = \beta x$.

P7. $\bigwedge_{x\epsilon C}\bigvee_{x'\epsilon C}(x' \circ x = \alpha x \wedge x \circ x' = \beta x)$.

P8. $x = y \circ \alpha x \Leftrightarrow x = \beta x \circ y$.

Si l'on ajoute aux deux systèmes considérés P et S l'axiome suivant:

S4 = P9. $x \circ y = y \circ x$,

ces systèmes deviennent équivalentes, ce que nous allons démontrer.

Dans ce but, développons d'abord la théorie basée sur les axiomes S1-S4. On a les théorèmes:

T_S1. $(x \circ y \circ x = x \wedge x \circ y' \circ x = x) \Rightarrow x \circ y = x \circ y'$.

En effet, l'hypothèse $x \circ y \circ x = x$ entraîne $x \circ y' = (x \circ y \circ x) \circ y'$ et l'hypothèse $x \circ y' \circ x = x$ entraîne $x \circ y = (x \circ y' \circ x) \circ y$. L'opération $\circ$ étant associative d'après S2 et commutative d'après S4, il en résulte la thèse du théorème.

En vertu de l'axiome S3 et du théorème T_S1, il existe pour tout $x \epsilon C$ un et un seul z tel que

$$1^\circ \ \bigvee_{y\epsilon C} z = y \circ x \quad \text{et} \quad 2^\circ \ x \circ z = x.$$

Nous pouvons donc admettre la définition suivante:

D_S1. $z = \alpha x \Leftrightarrow \bigvee_{y\epsilon C}(z = y \circ x \wedge x \circ z = x)$.

Le théorème T_S1 et l'axiome S3 impliquent

T_S2. $\bigwedge_{x\epsilon C}\bigvee_{1z\epsilon C} z = \alpha x$.

En introduisant deux autres définitions:

D_S2. $\beta x = \alpha x$,

D_S3. $x \epsilon C_0 \Leftrightarrow (x \circ x = x \wedge x \epsilon C)$,

les notions de la théorie du semigroupe deviennent les mêmes que celles de la théorie du pseudogroupe, et nous pourrons démontrer dans la première tous les axiomes de la seconde.

T_S3. $x, y \epsilon C_0 \Rightarrow x \circ y \epsilon C_0$.

En effet, on a par hypothèse $x \circ x = x$ et $y \circ y = y$ en vertu de la définition D_S3. On en conclut en vertu des axiomes S2 et S4 que $(x \circ y) \circ \circ (x \circ y) = x \circ y$, d'où la thèse $x \circ y \epsilon C_0$.

T_S4. $y = \alpha x \Rightarrow y \epsilon C_0$.

En effet, l'hypothèse du théorème entraîne l'existence d'un z tel que

$$(1) \qquad y = z \circ x \qquad \text{et} \qquad (2) \qquad x \circ y = x.$$

Donc $y \circ y = (z \circ x) \circ y = z \circ (x \circ y) = z \circ x = y$, ce qui entraîne la thèse $y \epsilon C_0$ en vertu de la définition D_S3.

T_S5. $y = ax \Rightarrow \bigwedge_{z \epsilon C}(x \circ z = x \Rightarrow y \circ z = y)$.

En effet, l'hypothèse du théorème entraîne l'existence d'un u tel que $x \circ u = y$. On a donc $y \circ z = (x \circ u) \circ z = u \circ (x \circ z)$ pour tout z, d'où $y \circ z = u \circ x = y$ pour $x \circ z = x$.

T_S6. $[x \circ y = x \wedge \bigwedge_{z \epsilon C_0}(x \circ z = x \Rightarrow y \circ z = y)] \Rightarrow y = ax$.

En effet, ax satisfaisant aux conditions $ax \epsilon C_0$ et $x \circ ax = x$ en vertu du théorème T_S4 et de la définition D_S1 respectivement, l'hypothèse $\bigwedge_{z \epsilon C_0}(x \circ z = x \Rightarrow y \circ z = y)$ entraîne $y \circ ax = y$ et il existe d'après la définition D_S1 un u tel que $x \circ u = ax$. On a donc $y = y \circ ax = y \circ (x \circ u) = (x \circ y) \circ u = x \circ u = ax$, où l'avant-dernier signe d'égalité résulte de l'hypothèse $x \circ y = x$.

Maintenant nous sommes à même de montrer que tous les axiomes et définitions de la théorie du pseudogroupe élémentaire commutatif sont satisfaits dans celle du semi-groupe régulier commutatif.

En effet, les axiomes P1, P2, P9 et P3 coïncident avec les axiomes S1, S2, S4 et le théorème T_S3 respectivement; l'axiome P4 résulte directement de S4, celui P8 de l'axiome P4 et de la définition D_S2; l'axiome P5 résulte de la définition D_S3, l'axiome P6′ est une conséquence directe du théorème T_S 2 et celui P6″ l'est en vertu de la définition D_S2; l'axiome P7 résulte du théorème T_S2 en vertu de D_S1, D_S2 et de S4; enfin, la définition D_P1' est correcte en vertu de T_S4, T_S5, T_S6 et de la définition D_S1 et celle D_P1'' l'est en vertu de la définition D_S2 et de l'axiome S4.

Réciproquement, les axiomes S1-S4 et les définitions D_S1-D_S3 résultent des axiomes et définitions admis pour le pseudogroupe élémentaire commutatif. Pour le montrer, nous commencerons par établir certains théorèmes résultant soit directement des axiomes P1-P9, soit des théorèmes sur le pseudogroupe élémentaire démontrés dans [2].

T_P1. $ax = \beta x$.

C'est une conséquence immédiate de l'axiome P9 et des définitions D_P1' et D_P1''.

T_P2. $x \epsilon C_0 \Leftrightarrow x \circ x = x \epsilon C$.

Démonstration. L'implication $x \epsilon C_0 \Rightarrow x \circ x = x \epsilon C$ résulte directement de l'axiome P5. Admettons donc que

$$x \circ x = x \epsilon C. \tag{1}$$

D'après les axiomes P6′ et P7 et la définition D_P1', il existe un ax et un x' tels que

$$x \circ ax = x, \tag{2}$$

$$ax \epsilon C_0, \tag{3}$$

$$x' \circ x = ax. \tag{4}$$

D'après les axiomes P2 et P9 les égalités (1), (2) et (4) entraînent $x = x \circ \alpha x = x \circ (x' \circ x) = x' \circ (x \circ x) = x' \circ x = \alpha x$, d'où $x \epsilon C_0$ en vertu de (3).

$\mathrm{T}_P 3$. $z = \alpha x \Leftrightarrow \bigvee_{y \epsilon C}(z = y \circ x \wedge x \circ z = x)$.

Démonstration. En admettant que $z = \alpha x$, on a d'après la définition $\mathrm{D}_P 1'$

(1) $$x \circ z = x$$

et il existe d'après P7 un y tel que

(2) $$y \circ x = z.$$

Réciproquement, en admettant (1) et (2), il vient $z \circ z = (y \circ x) \circ z = y \circ (x \circ z) = y \circ x = z$, d'où

(3) $$z \epsilon C_0$$

en vertu du théorème $\mathrm{T}_P 2$.

On conclut de (3) et (1) en vertu de la définition $\mathrm{D}_P 1'$ que $\alpha x \circ z = \alpha x$, d'où

(4) $$z \circ \alpha x = \alpha x$$

en vertu de l'axiome P9.

Vu que $x \circ \alpha x = x$ d'après la définition $\mathrm{D}_P 1'$, on conclut de (2) et (4) que $z = y \circ x = y \circ (x \circ \alpha x) = (y \circ x) \circ \alpha x = z \circ \alpha x = \alpha x$.

Vu que les axiomes S1-S4 coïncident avec les axiomes P1, P2, P9 et le théorème 3.28 de [2], et que les définitions $\mathrm{D}_S 1$-$\mathrm{D}_S 3$ coïncident avec les théorèmes $\mathrm{T}_P 1$-$\mathrm{T}_P 3$, les deux systèmes considérés P et S sont équivalents. Le théorème suivant se trouve donc établi:

THÉORÈME 1. *En définissant dans la théorie du semi-groupe régulier commutatif les notions* α, β *et* C_0 *par les définitions* $\mathrm{D}_S 1$-$\mathrm{D}_S 3$, *elle devient équivalente à celle du pseudogroupe élémentaire commutatif.*

En conséquence, nous pouvons désormais nous baser sur tous les axiomes et définitions de ces deux systèmes ainsi que sur les théorèmes qui en résultent. Pour la même raison, nous nous appuierons parfois sur les théorèmes établis dans [2] et qui sont valables aussi bien pour le pseudogroupe élémentaire que pour le groupoïde inductif élémentaire. En particulier, nous ferons l'usage des définitions suivantes:

$\mathrm{D}_S 4$. $x \prec y \Leftrightarrow x = y \circ \alpha x$.

$\mathrm{D}_S 5$. $y = \bar{x} \Leftrightarrow (y \circ x = \alpha x \wedge \alpha y = \alpha x)$.

La définition $\mathrm{D}_S 4$ coïncide avec la définition 3.2 de [2] et la définition $\mathrm{D}_S 5$ est la forme que prend la définition 3.3 de [2] à la suite de l'axiome S4. Cette définition est correcte, car il existe pour tout $x \in C$ un et seulement un élément $\bar{x}$ qui la vérifie (cf. [2], théorèmes 3.21 et 3.22).

Parmi les théorèmes de notre théorie qui cessent d'être valables pour les pseudogroupes non-commutatifs, notons ici les suivants:

T_S7. $a(x \circ y) = ax \circ ay$.

T_S8. $\overline{x \circ y} = \bar{x} \circ \bar{y}$.

T_S9. $a(x \circ x) = ax$.

En voici la démonstration commune. D_S1 et D_S5 entraînent

(1) $x \circ ax = x$, (2) $y \circ ay = y$, (3) $\bar{x} \circ x = ax$,

(4) $\bar{y} \circ y = ay$, (5) $a\bar{x} = ax$, (6) $a\bar{y} = ay$.

Posons

$$z = x \circ y. \tag{7}$$

Il vient de (1) et (2) $x \circ y = (x \circ ax) \circ (y \circ ay) = (x \circ y) \circ (ax \circ ay)$, d'où

$$z \circ (ax \circ ay) = z, \tag{8}$$

et il s'ensuit de (3) et (4) que $ax \circ ay = (\bar{x} \circ x) \circ (\bar{y} \circ y) = (\bar{x} \circ \bar{y}) \circ (x \circ y)$, c'est-à-dire que

$$(\bar{x} \circ \bar{y}) \circ z = ax \circ ay. \tag{9}$$

Enfin, on conclut de (5) et (6) que

$$a\bar{x} \circ a\bar{y} = ax \circ ay. \tag{10}$$

D_S1, (8) et (9) entraînent $ax \circ ay = az = a(x \circ y)$; le théorème T_S7 est donc établi. En vertu de lui, (9) et (10) deviennent respectivement

(11) $(\bar{x} \circ \bar{y}) \circ z = az$ et (12) $a(\bar{x} \circ \bar{y}) = az$,

d'où résulte le théorème T_S8 en vertu de D_S5. Le théorème T_S9 est également une conséquence immédiate du théorème T_S7.

T_S10. $x \precsim y \Leftrightarrow x \circ x = x \circ y$.

Démonstration. Soit d'abord $x \precsim y$, c'est-à-dire $x = y \circ ax$. Il vient $x \circ x = x \circ y \circ ax = x \circ ax \circ y = x \circ y$. Soit maintenant $x \circ x = x \circ y$. On a donc $x = ax \circ x = (\bar{x} \circ x) \circ x = \bar{x} \circ (x \circ x) = \bar{x} \circ (x \circ y) = (\bar{x} \circ x) \circ y = ax \circ y = y \circ ax$, d'où $x \precsim y$ d'après la définition D_S4.

Il est bien connu que la relation $\precsim$ étant définie par D_S4, on peut démontrer dans la théorie du pseudogroupe (pas nécessairement commutatif, mais quelconque) que la sous-classe C_0 y forme un $\frown$-demi-treillis. Dans le cas de pseudogroupe non-élémentaire, c'est d'ailleurs une conséquence directe d'un axiome d'Ehresmann (voir [4], p. 310, axiome 4), et de la définition de $\frown$-demi-treillis ([3], p. 27).

Le théorème qui suit montre que seuls les axiomes du pseudogroupe élémentaire sont indispensables pour démontrer cette propriété de C_0.

THÉORÈME 2. *Dans un pseudogroupe élémentaire, la sous-classe C_0 est un $\frown$-demi-treillis dont l'ordre est déterminé par la rélation $\preccurlyeq$, et où l'intersection des deux éléments $x \frown y$ est égale à $x \circ y$.*

Démonstration. D'après les théorèmes 3.15-3.17 de [2], $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre et d'après le théorème 3.47 et de la définition 3.5 de [2], tout couple x,y d'éléments de C_0 possède l'intersection $x \frown y$. Pour montrer que $x \frown y = x \circ y$, il suffit de s'appuyer sur le théorème 3.48 de [2].

En admettant la définition

D_S6. $y \epsilon C_x \Leftrightarrow ay = x \epsilon C_0$,

on a le

THÉORÈME 3. *Pour tout élément $a \epsilon C_0$ d'un semi-groupe régulier commutatif (aussi bien que d'un pseudogroupe élémentaire commutatif), la sous-classe C_a est un groupe abélien dans lequel $\circ$ est l'opération d'addition, a est l'élément neutre (le zéro) et $\bar{x}$ est l'élément $-x$, inverse de x.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que C_a satisfait aux conditions suivantes:

(1) $\bigwedge_{x,y \epsilon C_a} x \circ y \epsilon C_a$, (2) $\bigwedge_{x,y,z \epsilon C_a} (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$,

(3) $\bigwedge_{x,y \epsilon C_a} x \circ y = y \circ x$, (4) $a \epsilon C_a$,

(5) $\bigwedge_{x \epsilon C_a} x \circ a = x$, (6) $\bigwedge_{x \epsilon C_a} (\bar{x} \epsilon C_a \wedge \bar{x} \circ x = a)$.

La condition (1) se déduit facilement du théorème 3.31′ de [2] et de la définition D_S2. On peut la déduire aussi du théorème T_S7. Les conditions (2) et (3) résultent directement des axiomes S2 et S4, la condition (4) — de la définition D_S6 et du théorème 3.4′ de [2], la condition (5) — des définitions D_S6 et D_S1; enfin, la condition (6) résulte des définitions D_S6 et D_S5.

Vu que x et y étant deux éléments distincts de C_0, les sous-classes C_x et C_y sont disjointes, le théorème suivant se trouve en même temps démontré:

THÉORÈME 4. *Tout semi-groupe régulier commutatif est l'union $\bigcup_{x \epsilon C_0} C_x$ des groupes abéliens disjoints C_x dont l'ensemble des indices C_0 est un $\frown$-demi-treillis. Les opérations d'addition dans tous les groupes C_x et l'intersection $\frown$ dans le demi-treillis C_0 coïncident avec l'opération $\circ$.*

TRAVAUX CITÉS

[1] L. Dubikajtis, *Groupoïde inductif élémentaire et pseudogroupe élémentaire*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences mathématiques, astronomiques et physiques, 11 (1963), p. 469-471.

[2] — *Certaines extensions de la notion de groupoïde inductif et de celle de pseudogroupe*, ce fascicule, p. 163-185.

[3] M. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur et R. Croisot, *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques*, Paris 1953.

[4] C. Ehresmann, *Catégories inductives et pseudogroupes*, Annales de l'Institut Fourier à Grenoble 10 (1960), p. 307-332.

[5] Е. С. Ляпин, *Полугруппы*, Москва 1960.

UNIVERSITÉ NICOLAS COPERNIC DE TORUŃ

Reçu par la Rédaction le 28. 2. 1963