COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XII 1964 FASC. 2

KAZIMIERZ ZARANKIEWICZ

(2. V. 1902 - 5. IX. 1959)

PAR

S. BERGMAN (STANFORD, CALIFORNIA), R. DUDA, B. KNASTER, JAN MYCIELSKI (WROCŁAW) ET A. SCHINZEL (VARSOVIE)

Né le 2 mai 1902 à Częstochowa, Kazimierz Zarankiewicz passa en 1919 son baccalauréat au gymnase de Będzin et fit ses études des mathématiques à l'Université de Varsovie, y obtint en 1923 le grade de docteur en philosophie ayant soutenu sa thèse du doctorat [4](1) et en 1929 *venia legendi* pour les mathématiques (liée au titre scientifique de „docent", qui correspond à peu près à celui d'agrégé des universités françaises).

Depuis 1924 jusqu'à 1935, il était assistant des mathématiques et, plus tard, chargé des cours de la mécanique rationnelle à l'Ecole Polytechnique de Varsovie. Il passa l'année scolaire 1930-1931 à Vienne chez K. Menger et à Berlin, où il travaillait avec S. Bergman et, entre autres, sous les auspices de R. von Mises. Rentré à Varsovie, il y fut chargé également des cours des mathématiques et de la statistique mathématique à l'Ecole Supérieure d'Agriculture. En 1936, il fit une série semestrielle des conférences à l'Université de Tomsk (U. R. S. S.) surtout sur les transformations conformes, en particulier sur plusieurs problèmes résolus par lui-même. En 1937, il fut nommé suppléant du professeur à la chaire des mathématiques à la Faculté du génie civil de l'Ecole Polytechnique de Varsovie qui, au mois de mai de 1939, vota sa nomination au professorat extraordinaire à la même chaire. La procédure subséquente au Ministère ayant été interrompue par la II^{me} guerre mondiale, cette nomination ne fut signée qu'en 1946. Elle fut suivie bientôt, à savoir en 1948, de celle au professorat ordinaire. Quelques mois de la même année le virent travailler aux Etats Unis d'Amérique où il donna plusieurs leçons et conférences à l'Université de Harvard et à six autres universités.

Au cours des cinq années d'occupation allemande de la Pologne, il enseignait à Varsovie les mathématiques dans des écoles d'enseignement

(1) Pour les numéros en crochets, voir Bibliographie des travaux de Kazimierz Zarankiewicz, ce volume, p. 285-287.

professionnel et, clandestinement, aux cercles souterrains des étudiants. En 1944, après l'insurrection de Varsovie, il fut déporté — avec des milliers de polonais — aux camps des travaux forcés en Allemagne d'où il ne retourna qu'après la fin de la guerre. Aussitôt rentré à Varsovie en ruines, il y reprit ses cours à l'Ecole Polytechnique et les continua jusqu'à la fin de ses jours.

Le professeur Zarankiewicz a bien mérité non seulement de la recherche scientifique, mais aussi de la didactique, de la vulgarisation et de l'organisation de la science (cf. par exemple ses cours [38] et [40], de même que ses articles [34], [36], [39], [41] et [44]). Il prit entre ses mains, en 1949, la gestion des „Olympiades Mathématiques" organisées régulièrement pour les écoliers de la Pologne (cf. [37]) et la garda jusqu'à 1957, sans jamais abandonner sa part active de membre du Comité central de ces „Olympiades". Il appartenait jusqu'au même an au Comité de rédaction d'„Applied Mechanics Reviews" et jusqu'à sa mort à celui du périodique mensuel polonais „Matematyka", destiné avant tout pour les maîtres des écoles. Il présidait de 1948 à 1951 la Section de Varsovie de la Société Polonaise de Mathématique.

Un domaine à part, dans son activité, fut celui d'astronautique dont il s'intéressait vivement bien d'années avant que les possibilités des voyages dans le cosmos ne se fussent dessinées comme réalisables (voir par exemple son article [35] auquel succédèrent après la guerre ses publications [42], [43] et son livre [45]). Il mena à bonne fin, en 1956, la création de la Société Polonaise d'Astronautique. Il fut élu premier président de cette société et, depuis 1958, vice-président en même temps que membre d'honneur. En 1956, il présidait la délégation de la Société Polonaise d'Astronautique au VII$^{\text{me}}$ Congrès International d'Astronautique tenu à Rome et qui admit la Pologne au nombre des membres de la Fédération Internationale d'Astronautique. Depuis, le professeur Zarankiewicz représentait la Pologne aux congrès annuels consécutifs de cette fédération, qui l'élut deux fois de suite (en 1957 et 1958) son vice-président. En 1958, il fut élu membre d'honneur de la Société Allemande d'Astronautique.

Il mourut subitement le 5 septembre 1959 à Londres en présidant aux débats d'une séance plénière du X$^{\text{me}}$ Congrès de la Fédération Internationale d'Astronautique. Ses funérailles eurent lieu à Varsovie. Une des rues de cette ville porte son nom.

*

Kazimierz Zarankiewicz enrichit de ses travaux plusieurs théories des mathématiques, entre autres, celles des graphes, des fonctions complexes et des nombres, mais ses résultats les plus importants appartiennent à la topologie.

I. Topologie. Les recherches topologiques de Zarankiewicz concernaient surtout la division (et la division locale) des continus par les points et des espaces par les continus. Il montra dans l'un de ses premiers travaux de recherches (voir [2]) que C étant un continu localement connexe (image continue du segment de droite), l'ensemble $\tau(C)$ de tous les points qui divisent C est d'une structure spécifique: parmi les constituants (on appelle *constituant* l'union de tous les sous-continus contenant un point donné) de $\tau(C)$, il y a tout au plus une infinité dénombrable qui ne se réduisent pas à de seuls points et leurs fermetures sont des *dendrites* (continus localement connexes à 1 dimension et sans courbes simples fermées) de diamètre tendant à 0.

Il consacra ensuite sa thèse du doctorat [4] à l'étude détaillée de l'ensemble $\tau(C)$. Il y introduisit, entre autres, la notion bien féconde de *continu de convergence* (limite d'une suite de continus disjoints deux à deux et d'elle-même) et y établit, indépendamment d'Urysohn ([2]), une caractérisation importante des continus *héréditairement localement connexes* (c'est-à-dire dont tous les sous-continus sont localement connexes): la condition nécessaire et suffisante en est l'absence de continus de convergence (théorème 4). Il y caractérisa aussi les dendrites, à savoir par le théorème d'après lequel pour qu'un continu arbitraire C soit une dendrite, il faut et il suffit que l'ensemble $C-\tau(C)$, même en lui ajoutant une infinité dénombrable de points, ne contienne que des continus se réduisant à des seuls points (théorème 10). Il y donna enfin une caractérisation remarquable des continus localement connexes en généralisant les résultats antérieurs de R. L. Moore et de R. L. Wilder, et les combinant l'un à l'autre. Rappelons que F *divise* C entre les points p et q veut dire qu'il n'existe dans $C-F$ aucun sous-ensemble connexe contenant ces points, tandis que F *coupe* C entre eux veut dire qu'il n'existe dans $C-F$ aucun continu les contenant; diviser et couper *tout court* signifie respectivement l'existence de tels points p et q. Il en résulte, bien entendu, que diviser entraîne couper (entre les mêmes points). Or la caractérisation en question de la connexité locale d'un continu C consiste dans l'équivalence, pour tout sous-ensemble fermé F de C, entre diviser et couper C entre tout couple p,q de points (théorème 5).

Notons à ce propos qu'un problème non résolu et qui semble fort difficile se rattache à la fine différence entre les notions de couper et diviser *entre deux points donnés* d'une part et celles de couper et diviser *tout court* de l'autre: on ignore jusqu'à présent si l'équivalence, pour tout $F \subset C$ fermé, entre couper et diviser C par F sans spécifier entre quels points, donc tout court, est également une propriété caractéristique des continus C localement connexes ou seulement une propriété nécessaire.

([2]) P. S. Urysohn, *Mémoire sur les multiplicités cantoriennes, II*, Verhandelingen der Koniglijke Akademie van Wettenschappen **13**, Amsterdam **1928**, p. 1-172.

L'étude de la fonction $\tau(C)$ fut reprise par Zarankiewicz dans d'autres publications. Il y montra, entre autres, que parmi les sous-ensembles connexes ne se réduisant pas à de seuls points d'un ensemble connexe C quelconque, il n'y a qu'au plus une infinité dénombrable qui ont des points communs avec $\tau(C)$ sans en avoir deux à deux (voir [11]). Suivant un théorème qu'il établit dans son premier travail topologique d'après guerre (voir [22]), tout continu C trouve son image homéomorphe dans un continu C^* à autant de dimensions et dans lequel $\tau(C^*)$ est un ensemble à la fois frontière et dense. Ce travail contient aussi une nouvelle définition de l'élément cyclique (ne se réduisant pas à un point) au sens de Whyburn (3) qui semble ne pas avoir été exploitée jusqu'à présent.

Les recherches de Zarankiewicz sur la division des espaces par les continus portèrent surtout sur la division locale du plan. Par définition, A divise le plan *localement au point* p (en μ régions, donc $\mu \leqslant \aleph_0$) lorsque R étant une région quelconque contenant p, l'ensemble $R-A$ n'est pas connexe (est formé d'au moins μ composantes et il existe des régions R de diamètre arbitrairement petit, telles que $p \epsilon R$ et que $R-A$ est formé exactement de μ composantes). Or Zarankiewicz montra dans ses travaux [3], [10] et [11] que chacune des deux propriétés suivantes caractérise topologiquement la courbe simple fermée:

(i) continu divisant le plan localement en chacun de ses points exactement en 2 régions.

(ii) continu divisant le plan localement en chacun de ses points en un nombre fini de régions, le même pour tous ces points.

En y remplaçant „continu'' par „ensemble connexe fermé non compact'' (dit aussi „continu non-borné''), chacune de ces deux conditions devient une caractérisation topologique de la droite.

Ces résultats de Zarankiewicz se rattachent à ceux de son travail [1] consacré entre autres à la caractérisation des images homéomorphes de la droite, de la demi-droite et de la circonférence par leurs propriétés topologiques intrinsèques parmi tous les ensembles plans fermés et connexes. Il y appela *point de connexité* d'un tel ensemble E tout point dont aucun sur-ensemble connexe contenu dans E ne divise E. En appliquant et développant certains résultats de Kline (4), il montra que l'absence (héréditaire) de points de connexité dans un ensemble plan fermé connexe E caractérise topologiquement la droite (en cas d'absence non héréditaire, on a la caractérisation topologique de la circonférence complétée par un prolongement infini de son rayon), que la présence d'un seul point de connexité caractérise topologiquement la demi-droite parmi les E

(3) G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, New York 1942, p. 66.

(4) J. R. Kline, *Closed connected sets which remain connected upon the removal of certain connected subsets*, Fundamenta Mathematicae 5 (1924), p. 3-10.

non-bornés (et l'union de la circonférence et de son rayon parmi les E bornés), que la présence d'exactement 2 points de connexité caractérise topologiquement le segment de droite, et enfin que la présence de plus de 2 points de connexité caractérise la courbe simple fermée.

Ces théorèmes réflètent par leur nature quantitative plutôt que qualitative la tendance d'esprit de ce géomètre à chercher les solutions numériques dans tout domaine des mathématiques dont il s'occupait. Ainsi, dans ses travaux [5], [7] et [15], il se proposa d'évaluer la puissance de certains ensembles de points qui ne divisent pas un ensemble connexe ou le divisent d'une manière particulière. Il y montra par exemple que tout ensemble de points divisant un ensemble connexe en plus de 2 composantes est au plus dénombrable. Dans le même ordre d'idées, il y généralisa le fameux théorème de Moore concernant les triodes sur le plan (5) en montrant que, dans les espaces euclidiens à plus de 2 dimensions, toute famille de continus disjoints et dont chacun divise localement l'espace en un point par lequel il est divisé localement lui-même („doppelt zerlegender Punkt") est au plus dénombrable.

La dernière publication topologique de Zarankiewicz, commune de lui et de Kuratowski (voir [23]), traite d'une propriété du plan (plus précisément: de la surface sphérique S_2 considérée comme le plan augmenté du point à l'infini). Il s'agit du problème suivant: soient sur S_2 n régions simplement connexes (c'est-à-dire de frontière continue) et disjointes $R_1, \ldots, R_n$ et k continus disjoints $C_1, \ldots, C_k$ dont chacun empiète sur chacune de ces régions; quel est le nombre minimum $s_{k,n}$ des couples i,j tels que C_i divise R_j (où $i = 1, \ldots, k$ et $j = 1, \ldots, n$)?

La présomption de Zarankiewicz est que $s_{k,n} = (k-2)(n-2)$ pour les entiers $k > 2$ et $n > 2$ quels qu'ils soient. Ce serait donc une généralisation de son résultat antérieur (voir [8]), à savoir que $s_{3,3} = 1$, premier signe de la dualité entre k et n présumée par lui. Ici, les auteurs ne démontrèrent l'égalité présumée que pour tous les cas où soit k, soit n ne dépasse pas 4, le problème en toute sa généralité restant ouvert jusqu'à présent.

La topologie doit à Zarankiewicz aussi d'autres problèmes intéressants (voir [30]-[33] à titre d'exemple). L'un d'eux fut résolu par Miller (6), qui construisit une dendrite non homéomorphe à aucun vrai sous-ensemble d'elle-même.

Plusieurs traités, monographies et cours de topologie citent les résultats topologiques de Zarankiewicz dans plus d'un chapitre. Tels sont

---

(5) R. L. Moore, *Concerning triodic continua in the plane*, Fundamenta Mathematicae **13** (1929), p. 261-263.

(6) E. W. Miller, *Solution of the Zarankiewicz problem*, Bulletin of the American Mathematical Society **38** (1932), p. 831-834.

par exemple les livres de Kuratowski (7), Menger (8) et Whyburn (9) parmi les oeuvres les plus connues. C'est par l'intermédiaire de ces cours, surtout de celui de Kuratowski, que plusieurs notions et résultats topologiques de Zarankiewicz continuent à se développer et à intervenir dans des travaux plus récents sous une forme qui dispense déjà leurs auteurs de revenir toujours sur l'aspect primitif des énoncés, dû à Zarankiewicz, et de citer expressément son nom.

II. Graphes. Aux travaux précités [8] et [23] de Zarankiewicz viennent se rattacher par leur nature quantitative ses recherches relevant de la théorie combinatoire des graphes. Le résultat principal de son travail [19] concerne l'existence d'un sous-graphe complet d'ordre aussi grand que possible dans un graphe d'ordre n et de *multiplicité* („connection number" de Turán, c'est-à-dire nombre minimum d'arêtes sortant d'un sommet) suffisamment élevée. Le critère trouvé par Zarankiewicz fut plus tard amélioré par Turán (10) et soumis à une analyse intéressante.

Réciproquement, Zarankiewicz s'occupa dans son travail [26] (voir aussi [24]) d'un problème de Turán sur les graphes et en donna une solution digne d'attention, à savoir par le théorème suivant qu'il démontra: A et B étant des ensembles finis de points du plan et chaque point de A étant uni par des arcs simples à tous les points de B de façon que chaque point d'intersection n'appartenant ni à A, ni à B ne soit situé que sur 2 arcs au plus, le nombre de ces points d'intersection est au moins égal à

$$\left[\frac{a}{2}\right]\cdot\left[\frac{a}{2}-1\right]\cdot\left[\frac{b}{2}\right]\cdot\left[\frac{b}{2}-1\right]$$

où a et b sont les nombres de points de A et B respectivement et [ ] désigne la partie entière; ce minimum est atteint.

Le même théorème fut établi indépendamment et presque simultanément aussi par Urbanik (11).

En 1951, Zarankiewicz posa (voir [32]) le problème suivant, traité

(7) C. Kuratowski, *Topologie*, Monografie Matematyczne, I, quatrième édition (Varsovie 1958), p. 246, 249 et 265; II, troisième édition (Varsovie 1961), p. 102, 176, 196, 229 et 509.

(8) K. Menger, *Kurventheorie*, Leipzig und Berlin 1932, p. 56, 167, 168, 249 et 311.

(9) G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, New York 1942, p. 23, 63 et 99.

(10) P. Turán, *On the theory of graphs*, Colloquium Mathematicum 3 (1955), p. 19-29.

(11) K. Urbanik, *Solution du problème posé par P. Turán*, Colloquium Mathematicum 3 (1955), p. 200 et 201.

ensuite par plusieurs auteurs ([12]): trouver le plus petit nombre $k_j(n)$ tel que tout ensemble de $k_j(n)$ points d'un réseau plan de n^2 points (où $n > 3$) contienne j^2 points situés dans j lignes et dans j colonnes de ce réseau.

III. Fonctions complexes. Dans ses travaux [13], [14], [17] et [28], Zarankiewicz apporta quelques résultats intéressants sur la fonction dite le noyau („Kernfunktion") et ses applications. Bien qu'il s'adonnât de préférence à la topologie, il entendait parfaitement les problèmes qui se présentaient dans la théorie de cette fonction et en reconnut d'emblée l'utilité pour l'étude des fonctions de variable complexe. Ce furent ses premiers travaux d'analyse mathématique; pourtant il sut opérer avec habileté dans ce domaine et parvenir à des résultats méritant l'attention.

Soit $\{\varphi_\nu(z)\}$ où $\nu = 1, 2, \ldots$ un système complet de fonctions analytiques orthonormales dans un domaine D du plan des $z = x+iy$, c'est-à-dire satisfaisant à la condition

$$\iint_D \varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\mu(z)}\,dx\,dy = \begin{cases} 1 \text{ lorsque } \mu = \nu, \\ 0 \text{ lorsque } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

La fonction

$$K_D(z, \zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\nu(\zeta)}$$

existe pour z et ζ du domaine D et ne dépend que de lui. C'est cette fonction qui s'appelle *le noyau* du domaine D. Lorsqu'il est simplement connexe, la fonction

$$W(z) = \int_0^z K_D(z, \bar{\zeta})\,dz \tag{1}$$

transforme D en intérieur du cercle $|W| < C$ où C est une constante.

La fonction K_D est un invariant relatif, c'est-à-dire ayant la propriété suivante: si la fonction analytique $z^*(z)$ transforme le domaine D du plan des z en un domaine D^* du plan des z^*, on a

$$K_D(z, \bar{z}) = K_{D^*}\big(z^*(z), \overline{z^*(z)}\big)\left|\frac{dz^*(z)}{dz}\right|^2.$$

([12]) C. Hyltén-Cavallius, *On a combinatorial problem*, Colloquium Mathematicum 6 (1958), p. 59-65;

K. Čulik, *Teilweise Lösung eines verallgemeinerten Problems von K. Zarankiewicz*, Annales Polonici Mathematici 3 (1956), p. 165-168;

T. Kövari, V. T. Sós and P. Turán, *On a problem of K. Zarankiewicz*, Colloquium Mathematicum 3 (1954), p. 50-57;

Š. Znám, *On a combinatorial problem of K. Zarankiewicz*, Colloquium Mathematicum 11 (1964), p. 81-84.

Par conséquent, la relation

$$ds_D^2(z) = K_D(z, \bar{z})|dz|^2 = K_{D^*}(z^*, \overline{z^*})\,|dz^*|^2 = ds_{D^*}^2(z^*)$$

représente le carré de la longueur de l'élément linéaire d'une métrique invariante. La fonction

$$J_D(z, \bar{z}) = -\frac{2}{K_D(z, \bar{z})}\cdot\frac{\partial^2 \log K_D(z, \bar{z})}{\partial z \partial \bar{z}}$$

(la courbure de la métrique) est un invariant absolu par rapport aux transformations conformes. Dans le cas de domaine D simplement connexe, $J_D(z, \bar{z})$ est une constante. Tout cela était connu ([13]).

Or Zarankiewicz prouva par une investigation profonde et ingénieuse que dans le cas de domaine D doublement connexe, $J_D(z, \bar{z})$ cesse d'être constant. Il représenta d'une manière simple $J_D(z, \bar{z})$ par des fonctions doublement périodiques et montra comment on peut reconnaître à l'aide de cette représentation si deux domaines doublement connexes sont ou ne sont pas transformables l'un dans l'autre d'une façon conforme. En se servant de ce résultat, Kufareff ([14]) détermina la forme du domaine doublement connexe minimum, c'est-à-dire qui s'obtient des domaines doublement connexes par la transformation (1).

Le résultat précité de Zarankiewicz est d'un grand intérêt pour le développement de toute la théorie du noyau. Son importance dépasse considérablement les simples applications qui viennent d'être mentionnées. La méthode du noyau peut être généralisée en une théorie des transformations pseudo-conformes, c'est-à-dire de celles des domaines de l'espace des n-uples $z_1, z_2, \ldots, z_n$ par n fonctions analytiques de n variables complexes, la méthode décrite pour les transformations à une seule variable se laissant étendre au cas de transformations pseudo-conformes. Les résultats et le procédé employés par Zarankiewicz y servent de modèle qui est d'usage fréquent dans les travaux contemporains sur le noyau.

Les *ensembles distingués* sont les ensembles qui conservent certaines de leurs propriétés dans les transformations pseudoconformes. Un des importants problèmes de la moderne théorie est de déterminer et carac-

([13]) Pour le détail, voir par exemple S. Bergman, *Kernel function and conformal mapping*, Mathematical Surveys 5, American Mathematical Society, 1950, *Sur les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes avec les applications à la théorie des fonctions analytiques*, Mémor. Sci. Math. 106 (1947), et *Sur la fonction-noyau d'un domaine et ses applications dans la théorie des transformations pseudo-conformes*, ibidem 108 (1948).

([14]) P. P. Kufareff, *Über das zweifach zusammenhängende Minimalgebiet*, Известия научно-исследовательского института математики и механики университета, Томск [Bulletins de l'Institut Mathématique et Mécanique de l'Université de Tomsk] 1 (1935-1937), p. 228-236.

tériser des ensembles distingués. La ligne $[J_D(z, \bar{z}) = \text{minimum}]$ est l'exemple le plus simple d'un ensemble distingué (intérieur) pour les domaines doublement connexes dans la théorie des transformations conformes.

IV. Théorie des nombres. La publication [21] de Zarankiewicz traite des nombres dits *triangulaires* (triplets d'entiers égaux respectivement aux longueurs des côtés des triangles rectangles). Les problèmes posés par lui ont inspiré un travail de Sierpiński (15) à la fin duquel on trouve un ingénieux exemple, dû à Zarankiewicz, d'une décomposition de l'ensemble de tous les nombres naturels en deux sous-ensembles disjoints dont aucun ne contient un triplet de nombres consécutifs, pas plus qu'une progression arithmétique infinie. Les résultats de Zarankiewicz sont cités dans plusieurs chapitres du traité de Sierpiński sur la théorie élémentaire des nombres (16).

BIBLIOGRAPHIE DES TRAVAUX DE KAZIMIERZ ZARANKIEWICZ

[1] *Remarque sur un théorème de M. Kline*, Fundamenta Mathematicae 5 (1924), p. 11-13.

[2] *Sur la structure d'un ensemble de points de division dans les continus de Jordan*, Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie, A — Sciences mathématiques, 1926, p. 361-371.

[3] *Sur les coupures locales faites par les continus*, ibidem 1927, p. 193-218.

[4] *Sur les points de division dans les ensembles connexes*, Fundamenta Mathematicae 9 (1927), p. 124-171.

[5] (et C. Kuratowski), *A theorem on connected point sets*, Bulletin of the American Mathematical Society 23 (1927), p. 571-575.

[6] *O zbiorach lokalnie mierzalnych (B) [Sur les ensembles mesurables (B) localement]*, Wiadomości Matematyczne 30 (1927-1928), p. 127-132.

[7] *Über Endpunkte*, Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie, A — Sciences mathématiques, 1928, p. 445-453.

[8] *Über eine topologische Eigenschaft der Ebene*, Fundamenta Mathematicae 11 (1928), p. 19-26.

(15) W. Sierpiński, *Remarques sur les progressions arithmétiques*, Colloquium Mathematicum 3 (1954), p. 44-49.

(16) W. Sierpiński, *Teoria liczb*, Monografie Matematyczne, III$^{\text{me}}$ édition, Varsovie 1950, p. 101, 516-518, et 1959 (2$^{\text{me}}$ partie), p. 136, 153 et 210.

[9] *Über die Zerschneidungspunkte der zusammenhängenden Mengen*, ibidem 12 (1928), p. 121-125.

[10] *Über eine Umkehrung des Jordanschen Kurvensatzes*, ibidem 13 (1929), p. 264-268.

[11] *Über die lokale Zerschneidung der Ebene*, Monatshefte für Mathematik und Physik 39 (1932), p. 43-45.

[12] *Über eine Eigenschaft des Konvergenzkontinuums*, Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft 31 (1932), p. 43-45.

[13] *Sur la représentation conforme d'un domaine doublement connexe sur un anneau circulaire*. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris, 198 (1934), p. 1347-1349.

[14] *Über ein numerisches Verfahren zur konformen Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 14 (1934), p. 97-104.

[15] *Über doppeltzerlegende Punkte*, Fundamenta Mathematicae 23 (1934), p. 166-171.

[16] *Zur lokalen Zerschneidung des Raumes*, Mitteilungen des Forschungsinstituts für Mathematik und Mechanik der Universität Tomsk 1 (1935-1937), p. 155-159.

[17] *O pewnej metodzie odwzorowania wiernego obszarów dwuspójnych [Sur une méthode de la représentation conforme des domaines doublement connexes]*, Varsovie 1938, 46 p.

[18] *Sur les nombres des points de ramification dans les dendrites et dans les graphes*, Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, Sciences mathématiques et physiques, 39 (1946), p. 18-24.

[19] *Sur les relations symétriques dans l'ensemble fini*, Colloquium Mathematicum 1 (1947), p. 10-14.

[20] *Images réciproques de fonctions continues univoques et le principe de Dirichlet*, Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, Sciences mathématiques et physiques, 41 (1948), p. 1-7.

[21] *O liczbach trójkątowych [Sur les nombres triangulaires]*, Matematyka 2 (1949), n° 4, p. 1-7 et n° 5, p. 1-8.

[22] *On the category of the set of cut points of continua of certain type*, Czechoslovak Mathematical Journal 1 (1951), p. 57-62.

[23] (et C. Kuratowski), *Sur un problème concernant les coupures des régions par des continus*, Fundamenta Mathematicae 39 (1952), p. 15-24.

[24] *The solution of certain problem on graphs of P. Turán*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Classe III, 1 (1953), p. 167-168.

[25] *Un théorème sur l'uniformisation des fonctions continues et son application à la démonstration du théorème de F. J. Dyson sur les transformations de la surface sphérique*, ibidem, 2 (1954), p. 117-120.

[26] *On a problem of P. Turán concerning graphs*, Fundamenta Mathematicae 41 (1954), p. 137-145.

[27] (and R. Sikorski), *On uniformization of functions, I*, ibidem, p. 339-344.

[28] *Konforme Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete*, Berichte über den VII. Internationalen Astronautischen Kongress, Rome 1956, p. 305-311.

[29] *O prostych połowiących pola wypukłe [Sur les droites divisant les aires convexes en moitiés]*, Wiadomości Matematyczne 2 (1957-1959), p. 228-234.

PROBLÈMES

[30] *Problème 37*, Fundamenta Mathematicae 7 (1925), p. 381.

[31] (et B. Knaster), *Problème 42*, ibidem 8 (1926), p. 386.

[32] *Problème P 101*, Colloquium Mathematicum 2 (1951), p. 301.

[33] *Problèmes P 115, P 116 et P 117*, ibidem 3 (1954), pp. 44, 45 et 46.

COURS ET MISCELLANÉES

[34] *O teorji mnogości i topologji [Sur la théorie des ensembles et la topologie]*, Mathesis Polska 4 (1929), p. 154-157.

[35] *O ruchu rakiety kosmicznej [Sur le mouvement de la fusée cosmique]*, Przegląd Techniczny (1939), n° 4.

[36] *O nauczaniu matematyki w Stanach Zjednoczonych [Sur l'enseignement des mathématiques aux Etats Unis]*, ibidem 3 (1950), n° 2, p. 34-40.

[37] *O matematyce [Sur les mathématiques]*, Olimpiada Matematyczna, Varsovie 1950, 7 p.

[38] *Matematyka wyższa dla studentów wyższych szkół leśnych i rolniczych* (skrypt) *[Cours des mathématiques pour les étudiants des écoles supérieures forestières et agricoles]*, Varsovie 1952, 209 p.

[39] *Dziesięć lat matematyki w Polsce Ludowej [Dix années des mathématiques en Pologne Démocratique]*, Matematyka 7 (1954), n° 4, p. 6-9.

[40] *Mechanika teoretyczna*, tom I *Statyka*, tom II *Kinetyka* i tom III *Dynamika [Mécanique rationnelle*, volume I *Statique*, volume II *Cinétique* et volume III *Dynamique]*, Varsovie 1955.

[41] *Z dziejów mechaniki (Archimedes, Galileusz, Newton) [De l'histoire de la mécanique (Archimède, Galilée, Newton)]*, Varsovie 1956, 49 p.

[42] *O możliwościach podróży międzyplanetarnej [Sur les possibilités du voyage interplanétaire]*, Politechnika 4 (1957).

[43] *O sztucznym księżycu [Sur une lune artificielle]*, Varsovie 1957, 50 p.

[44] *Kartki z dziejów mechaniki [Feuilles de l'histoire de la mécanique]*, Varsovie 1958, 186 p.

[45] *Astronautyka popularna [L'astronautique populaire]*, Varsovie 1959, 315 p.