COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XII 1964 FASC. 1

SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE FONCTIONNELLE À ARGUMENT ACCÉLÉRÉ

PAR

T. DŁOTKO (KATOWICE) ET M. KUCZMA (CRACOVIE)

Le but de cette communication est d'établir quelques théorèmes concernant les équations de la forme

$$H\big(t, \varphi(t), \varphi\big(h(t)\big), \varphi'(t)\big) = 0 \tag{1}$$

où les fonctions $H(t, x, y, z)$ et $h(t)$ sont données et la fonction $\varphi(t)$ est inconnue. Nous nous bornerons au cas où l'équation (1) peut s'écrire sous la forme moins implicite

$$\varphi\big(h(t)\big) = g\big(t, \varphi(t), \varphi'(t)\big), \tag{2}$$

ou bien

$$\varphi'(t) = f\Big(t, \varphi(t), \varphi\big(h(t)\big)\Big). \tag{3}$$

Suivant que $h(t) \geqslant t$ ou $h(t) \leqslant t$, on peut considérer (3) comme une équation différentielle à argument accéléré ou à argument retardé.

On a consacré au cours des dernières années plusieures publications aux équations différentielles à argument retardé, mais bien peu à celles à argument accéléré (voir [7] et [9]).

Un théorème sur l'existence et l'unicité des solutions de l'équation (3) dans laquelle $h(t) = t + \text{const} > t$ a été démontré par Doss et Nasr [5] et généralisé par Błaż [3] aux systèmes d'équations dans lesquels $h(t) - t$ peut être variable. Un autre théorème sur l'existence des solutions de l'équation (3) a été établi par Bielecki [1]. Les propriétés asymptotiques des solutions en question ont été étudiées dans [2] et [4].

Nous nous proposons de résoudre ici deux problèmes suivants se rapportant au cas $h(t) \geqslant t$:

I. Trouver une fonction $\varphi(t)$ satisfaisant à l'équation (2) dans l'intervalle semi-ouvert $\langle a, b)$ et à la condition initiale

$$\varphi(t) = \alpha(t) \quad \text{pour} \quad a \leqslant t \leqslant h(a). \tag{4}$$

II. Trouver une fonction $\varphi(t)$ satisfaisant à l'équation (3) dans l'intervalle fermé $\langle a, b\rangle$ ou semi-ouvert $\langle a, \infty)$ et à la condition initiale

$$\varphi(a) = \varphi_0. \tag{5}$$

Nous allons montrer au § 1 que si les fonctions $g(t, x, z)$ et $h(t)$ sont de classe C^∞, le problème I a une solution $\varphi(t)$ de la même classe. Cette solution sera construite à l'aide des prolongements successifs.

L'existence des solutions du problème II sera établie au § 2 en admettant que les fonctions $f(t, x, y)$ et $h(t)$ sont continues et que la première satisfait à une condition limitant la vitesse des accroissements de la fonction $f(t, x, y)$ lorsque x et y croissent infiniment.

Le § 3 sera consacré à une généralisation du théorème de Doss et Nasr [5] et de celui de Błaż [3].

§ 1. Admettons les hypothèses suivantes:

H1. La fonction $h(t)$ est de classe C^∞ pour $a \leqslant t < b$ où $b \leqslant \infty$.

H2. On a $h(t) > t$ et $h'(t) > 0$ pour $a \leqslant t < b$ et $\lim\limits_{t\to b} h(t) = b$.

H3. La fonction $g(t, x, z)$ est de classe C^∞ dans le domaine $D\{(t, x, z)$: $a \leqslant t < b,\ -\infty < x, z < +\infty\}$.

Vu les hypothèses H1 et H2, la fonction $h(t)$ possède une fonction inverse $h^{-1}(t)$ de classe C^∞ pour $a \leqslant t < b$. Posons

$$G_0(t, x_0, x_1) = g(t, x_0, x_1),$$

$$G_{n+1}(t, x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) =$$
$$= [h'(t)]^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t} G_n(t, x_0, \ldots, x_n)x_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} G_n(t, x_0, \ldots, x_n)x_{n+1}\right],$$
$$n = 0, 1, \ldots$$

Pour tout $n = 1, 2, \ldots$, la fonction G_n est de classe C^∞ dans le domaine $\{a \leqslant t < b;\ -\infty < x_0, \ldots, x_n < +\infty\}$ et toute fonction $\psi(t)$ de classe C^∞ dans un intervalle $I \subset \langle a, b)$ satisfait pour tout $n = 1, 2, \ldots$ à l'équation

$$\frac{d^n}{dt^n} g\big(h^{-1}(t), \psi[h^{-1}(t)], \psi'[h^{-1}(t)]\big) = G_n\big(h^{-1}(t), \psi[h^{-1}(t)], \ldots, \psi^{(n+1)}[h^{-1}(t)]\big). \tag{6}$$

Soit $a_0 = a$ et $a_{n+1} = h(a_n)$. En vertu de H1, la suite $\{a_n\}$ est croissante et converge vers b.

THÉORÈME 1. *Sous les hypothèses* H1-H3, *si* $\alpha(t)$ *est une fonction de classe* C^∞ *pour* $a \leqslant t \leqslant a_1$ *et satisfait aux conditions*

$$\alpha^{(n)}(a_1) = G_n\big(a, \alpha(a), \alpha'(a), \ldots, \alpha^{(n+1)}(a)\big) \quad \textit{pour} \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{7}$$

il existe une et une seule solution $\varphi(t)$ du problème I *étant une fonction de classe C^∞.*

Démonstration. On a en vertu des équations (2), (4) et (7)

$$(8)\qquad \varphi(t) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{pour} \quad a \leqslant t < a_1, \\ g\big(h^{-1}(t), \varphi[h^{-1}(t)], \varphi'[h^{-1}(t)]\big) & \text{pour} \quad a_1 \leqslant t < b \end{cases}$$

et

$$\alpha(a_1) = g\big(h^{-1}(a_1), \varphi[h^{-1}(a_1)], \varphi'[h^{-1}(a_1)]\big).$$

La fonction $\varphi(t)$ est donc bien déterminée dans l'intervalle fermé $\langle a, a_2\rangle$ et on montre par induction à l'aide des identités (7) qu'elle est infiniment dérivable au point a_1. Ceci étant, l'équation (8) définit les prolongements successifs de la fonction $\varphi(t)$ aux intervalles fermés $\langle a_1, a_3\rangle$, $\langle a_2, a_4\rangle$ et ainsi de suite. La solution du problème I ainsi obtenue possède manifestement les dérivées de tout ordre dans l'intervalle semi-ouvert $\langle a, b)$.

Le théorème 1 garantit l'existence et fait connaître la construction des solutions de l'équation (2) si les fonctions h et g sont suffisamment régulières (lorsque $h(t)$ et $g(t, x, z)$ sont des polynômes par exemple).

Remarque 1. Sous les hypothèses H1-H3, l'équation (2) a une infinité de solutions dans l'intervalle $\langle a, b)$. En effet, on peut évidemment admettre que $\alpha(t) = F(t)$ pour $a \leqslant t \leqslant c < a_1$, $F(t)$ étant une fonction quelconque de classe C^∞ pour $a \leqslant t \leqslant c$, et ensuite prolonger la fonction $\alpha(t)$ à l'intervalle $\langle a, a_1\rangle$ de manière que la condition (7) soit satisfaite (cf. Whitney [11]).

Remarque 2. On peut appliquer la même méthode (et le problème en devient plus simple) lorsque $\lim\limits_{t\to b} h(t) > b$. En effet, il existe alors un tel indice m que $a_m > b$. Il suffit donc d'admettre que les fonctions $h(t)$ et $g(t, x, z)$ sont de classe C^m, que la fonction $\alpha(t)$ l'est pour $a \leqslant t \leqslant a_1$ et qu'elle satisfait aux conditions (7) pour $n = 0, 1, \ldots, m$. Les formules (8) déterminent alors la solution $\varphi(t)$ de classe C^1 de l'équation (2) avec la condition initiale (4) pour $a \leqslant t < b$ (cf. [7]).

§ 2. Examinons maintenant l'équation (3).

Théorème 2. *Admettons que la fonction $f(t, x, y)$ est continue dans le domaine $D\{(t, x, y)\colon a \leqslant t \leqslant b,\ -\infty < x, y < +\infty\}$, que la fonction $h(t)$ l'est dans l'intervalle $a \leqslant t \leqslant b$, que $a \leqslant h(t) \leqslant b$ pour $a \leqslant t \leqslant b$ et que $\lim\limits_{t\to b-0} h(t) = b$. Admettons de plus qu'il existe des nombres M et N tels que $0 < N < M$ et que*

$$\int_a^b \big|f\big(t, x(t), y(t)\big)\big|\, dt \leqslant N \ \textit{lorsque}\ |x(t)| \leqslant M \ \textit{et}\ |y(t)| \leqslant M \quad \textit{pour} \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

Admettons enfin que $|\varphi_0| \leqslant M-N$. *Alors l'équation* (3) *possède au moins une solution* $\varphi(t)$ *de classe* C^1 *satisfaisant à la condition initiale* (5), *cette solution est bornée par le nombre* M *et il existe des limites finies* $\lim\limits_{t\to b-0}\varphi(t)$ *et* $\lim\limits_{t\to b-0}\varphi'(t)$.

Démonstration. Considérons dans l'espace de Banach dont les éléments sont des fonctions continues φ définies dans l'intervalle fermé $\langle a, b\rangle$ avec la norme $\|\varphi\| = \max\limits_{t\epsilon\langle a,b\rangle}|\varphi(t)|$ un ensemble Φ non-vide, fermé, borné et convexe, composé de fonctions $\varphi(t)$ pour lesquelles $\|\varphi\| \leqslant M$. L'opération

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi_0 + \int\limits_a^t f\Big(\tau, \varphi(\tau), \varphi\big(h(\tau)\big)\Big)\,d\tau \tag{9}$$

définie pour les fonctions $\varphi(t)\,\epsilon\,\Phi$ les transforme en fonctions appartenant au même ensemble, car les hypothèses admises entraînent

$$\|\tilde{\varphi}\| \leqslant |\varphi_0| + N \leqslant M. \tag{10}$$

Les fonctions $\tilde{\varphi}(t)$ sont équicontinues dans l'intervalle fermé $\langle a, b\rangle$, car on a

$$|\tilde{\varphi}(t+\Delta t) - \tilde{\varphi}(t)| \leqslant \int\limits_t^{t+\Delta t}\Big|f\Big(\tau, \varphi(\tau), \varphi\big(h(\tau)\big)\Big)\Big|\,d\tau \leqslant \varepsilon$$

lorsque $t, t+\Delta t\,\epsilon\,\langle a, b\rangle$, $\Delta t \geqslant 0$ et $|\Delta t| \leqslant \varepsilon\mu^{-1}$ où $\mu = \max|f(t, x, y)|$ dans le domaine $D'\{(t, x, y): a \leqslant t \leqslant b,\ -M \leqslant x, y \leqslant M\}$. En vertu du théorème d'Arzela, l'opération (9) transforme donc l'ensemble Φ en un ensemble compact. Il en résulte en vertu du théorème de Schauder sur le point invariant que l'équation (3) possède au moins une solution $\varphi(t)$ continue, assujettie à (5) et bornée dans l'intervalle fermé $\langle a, b\rangle$ en vertu de (10).

THÉORÈME 3. *Admettons que la fonction* $f(t, x, y)$ *est continue dans le domaine* $D\{(t, x, y)\colon t \geqslant 0,\ -\infty < x, y < +\infty\}$, *que la fonction* $h(t)$ *l'est pour tout* $t \geqslant 0$, *que* $h(t) \geqslant 0$ *et que* $|f(t, x, y)| \leqslant K$ *pour* $t \geqslant 0$, $|x| \leqslant M$ *et* $|y| \leqslant M$. *Admettons de plus qu'il existe pour tout* $M > 0$ *un* N *tel que* $0 < N < M$ *et que*

$$\Big|\int\limits_0^t f\big(\tau, x(\tau), y(\tau)\big)\Big|\,d\tau \leqslant N \text{ lorsque } |x(t)| \leqslant M \text{ et } |y(t)| \leqslant M \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0,$$

les fonctions $|x(t)|$ *et* $|y(t)|$ *étant supposées continues. Alors, à chaque condition initiale* $(0, \varphi_0)$ *telle que* $|\varphi_0| \leqslant M-N$, *vient correspondre au moins une solution* $\varphi(t)$ *du problème* II.

Démonstration. Désignons par B l'espace linéaire formé de fonctions $\varphi(t)$ continues pour $t \geqslant 0$ et telles que

$$\|\varphi\| = \sup_{t\geqslant 0}\{|\varphi(t)|e^{-t}\} < +\infty. \tag{11}$$

L'espace B avec la norme (11) est complet. Soit $U \subset B$ l'ensemble des fonctions $\varphi(t)$ telles que $|\varphi(t)| \leqslant M$ pour $t \geqslant 0$. L'ensemble U est non-vide, borné, fermé et convexe.

Examinons la transformation $\psi(t) = T\varphi(t)$ définie pour $\varphi(t) \in U$ par la formule

$$\psi(t) = \varphi_0 + \int_0^t f\Big(\tau, \varphi(\tau),\ \varphi\big(h(\tau)\big)\Big)\,d\tau \qquad \text{pour} \quad t \geqslant 0. \tag{12}$$

On a d'après les hypothèses admises $|\psi(t)| \leqslant \varphi_0 + N \leqslant M$, d'où $\psi(t) \in U$. Posons $V = T(U)$. On a donc $V \subset U$.

L'opération $\psi(t)$ est continue. Considérons, en effet, la suite $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \ldots$, qui converge vers $\varphi(t)$ d'après la norme (11). Pour montrer que la suite $\psi_1(t) = T\varphi_1(t)$, $\psi_2(t) = T\varphi_2(t), \ldots$ converge vers $\psi(t) = T\varphi(t)$ d'après la norme (11), il suffit d'établir la convergence de l'expression $\sup\limits_{t\geqslant 0}|\psi_n(t) - \psi(t)|e^{-t}$ vers 0 avec $n \to \infty$. Or (12) entraîne

$$|\psi_n(t) - \psi(t)| \leqslant \int_0^t \Big|f\Big(\big(\tau, \varphi_n(\tau), \varphi_n\big(h(\tau)\big)\Big) - f\Big(\tau, \varphi(\tau),\ \varphi\big(h(\tau)\big)\Big)\Big|\,d\tau \tag{13}$$

$$\text{pour } t \geqslant 0.$$

Soit $\theta_0 > 0$. La convergence uniforme $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ dans l'intervalle $\langle 0, \theta_0\rangle$ entraîne l'existence, pour $\varepsilon > 0$, d'un nombre N_ε tel que $|\varphi_n - \varphi| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n > N_\varepsilon$ et tout $t \in \langle 0, \theta_0\rangle$. La continuité des fonctions $f(t, x, y)$ et $h(t)$ dans cet intervalle fermé entraîne

$$\Big|f\Big(t, \varphi_n(t),\ \varphi_n\big(h(t)\big)\Big) - f\Big(t, \varphi(t), \varphi\big(h(t)\big)\Big)\Big| \leqslant \varepsilon_1,$$

donc $|\psi_n(t) - \psi(t)| \leqslant \varepsilon_1$ pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$ et $t \in \langle 0, \theta_0\rangle$.

Vu (13), on a $|\psi_n(t) - \psi(t)| \leqslant 2M$ pour $t \in \langle \theta_0, \infty)$, d'où $|\psi_n(t) - \psi(t)|e^{-t} \leqslant \varepsilon_1\theta_0 e^{-t}$ pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$ et $t \in \langle 0, \theta_0\rangle$, et $|\psi_n(t) - \psi(t)|e^{-t} \leqslant 2Me^{-t}$ pour tout $n \geqslant 1$ et $t \geqslant \theta_0$.

La continuité de l'opération $\psi(t)$ étant ainsi établie, nous allons montrer que l'ensemble V est compact. Soit dans ce but $\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots$ une suite arbitraire des fonctions appartenant à V. Choisissons une suite de nombres $\{\theta_m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, telle que $\lim\limits_{m\to\infty}\theta_m = \infty$. Il vient pour $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \theta_1$

$$\begin{aligned} |\psi_n(t_2) - \psi_n(t_1)| &= |T\varphi_n(t_2) - T\varphi_n(t_1)| \\ &= \Big|\int_{t_1}^{t_2} f\Big(t, \varphi_n(t), \varphi_n\big(h(t)\big)\Big)\,dt\Big| \leqslant K(t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Ainsi, les fonctions $\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots$ sont équicontinues et on a $|\psi_n(t)| \leqslant M$ pour $n = 1, 2, \ldots$ D'après le théorème d'Arzela, on peut donc tirer de la suite $\{\psi_n(t)\}$ une suite partielle $\{\psi_n^1(t)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, telle que $\psi_n^1(t) \rightrightarrows \psi^1(t)$ dans l'intervalle fermé $\langle 0, \theta_1 \rangle$, la fonction $\psi^1(t)$ étant continue dans cet intervalle.

En examinant la suite $\{\psi_n^1(t)\}$ dans l'intervalle fermé $\langle 0, \theta_2 \rangle$, on peut montrer d'une façon analogue que les fonctions $\psi_n^1(t)$ y sont équicontinues et que $|\psi_n^1(t)| \leqslant M$ pour $n = 1, 2, \ldots$, donc qu'il en existe une suite partielle $\{\psi_n^2(t)\}$ telle que $\psi_n^2(t) \rightrightarrows \psi^2(t)$, la fonction $\psi^2(t)$ étant continue dans cet intervalle. L'itération de ce procédé conduit pour tout $m = 1, 2, \ldots$ à une suite partielle $\{\psi_n^m(t)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, de $\{\psi_n^{m-1}(t)\}$ telle que $\psi_n^m(t) \rightrightarrows \psi^m(t)$ dans l'intervalle fermé $\langle 0, \theta_m \rangle$, les fonctions $\psi^m(t)$ y étant continues. La suite diagonale $\psi_1^1(t), \psi_2^2(t), \ldots, \psi_n^n(t), \ldots$ converge alors presque uniformément dans l'intervalle $\langle 0, \infty \rangle$ vers une fonction $\psi(t) \in U$ telle que $\psi(t) \equiv \psi^m(t)$ pour $t \in \langle 0, \theta_m \rangle$. Ceci établi, fixons un nombre $\varepsilon > 0$ et posons $\theta_\varepsilon = \ln 4M\varepsilon^{-1}$. Nous avons donc

$$\sup_{t \geqslant 0} |\psi(t) - \psi_n^n(t)| e^{-t} \leqslant \sup_{\theta_\varepsilon \geqslant t \geqslant 0} |\psi(t) - \psi_n^n(t)| e^{-t} + \sup_{t \geqslant \theta_\varepsilon} |\psi(t) - \psi_n^n(t)| e^{-t}. \tag{14}$$

On a pour le premier sommande du second membre de (14)

$$\sup_{\theta_\varepsilon \geqslant t \geqslant 0} |\psi(t) - \psi_n^n(t)| e^{-t} \leqslant 2^{-1}\varepsilon \quad \text{pour} \quad n \geqslant N_\varepsilon \tag{15}$$

et pour le second sommande

$$\sup_{t \geqslant \theta_\varepsilon} |\psi(t) - \psi_n^n(t)| e^{-t} \leqslant \sup_{t \geqslant \theta_\varepsilon} 2Me^{-t} = 2^{-1}\varepsilon. \tag{16}$$

Il s'ensuit de (15) et (16) que l'ensemble V est compact. Reste donc à appliquer le théorème de Schauder [1].

Remarque 3. Les théorèmes 2 et 3 semblent présenter un certain intérêt parce qu'il existe des équations différentielles de la forme (3) ayant pour $|\varphi_0| < L$ une solution définie dans l'intervalle $\langle a, b \rangle$ tout entier, où $b = h(b)$. Par contre (voir [9]), si $|\varphi_0| > L$, cette équation n'a pas de solutions qui soient définies dans l'intervalle $\langle a, b \rangle$ tout entier et qui satisfassent à la condition (5).

§ 3. Soit maintenant $f(t, x, y)$ une fonction satisfaisant à la condition de Lipschitz.

THÉORÈME 4. *Admettons que la fonction $f(t, x, y)$ est continue dans le domaine $D\{(t, x, y): a_0 \leqslant t < A,\ -\infty < x, y < +\infty\}$, que la fonction $h(t)$ l'est pour tout $t \geqslant 0$, que $h(t) \geqslant 0$ pour tout $t \geqslant a_0$ et qu'il existe*

(1) Cette méthode de démonstration de la compacité de l'ensemble V a été employée par Bielecki [1].

une suite infinie croissante de zéros $\{a_i\}_{i=1,2,\ldots}$ *de la fonction* $h(t)-t$ *avec* $A = \lim_{i\to\infty} a_i$. *Admettons de plus que la fonction* $f(t, x, y)$ *satisfait dans le domaine* D *à la condition de Lipschitz*

$$|f(t, x, y)-f(t, X, Y)| \leqslant L_1(t)|x-X|+L_2(t)|y-Y|$$

et qu'en posant

$$B_i = \int_{a_i}^{a_{i+1}} [L_1(t)+L_2(t)]dt,$$

on a $B_i < 1$ *pour* $i = 1, 2, \ldots$, *les fonctions* $L_1(t)$ *et* $L_2(t)$ *étant supposées continues pour* $a_0 \leqslant t < A$. *Alors l'équation* (3) *a exactement une solution* $\varphi(t)$ *définie dans l'intervalle semi-ouvert* $\langle a_0, A)$, *continue, de même que sa dérivée, dans cet intervalle et satisfaisant à la condition* (5).

Démonstration. La transformation (11) définie pour les fonctions $\varphi(t)$ continues dans l'intervalle fermé $\langle a_0, a_1\rangle$ avec la métrique $\|\varphi-\psi\| = \max_{a_0\leqslant t\leqslant a_1} |\varphi(t)-\psi(t)|$ satisfait aux hypothèses du théorème de Banach sur le point fixe. En effet, il est connu que l'espace des fonctions $\varphi(t)$ en question est métrique et complet. Il suffit donc de poser $\tilde{\psi}(t) = T\psi(t)$ et $\tilde{\varphi}(t) = T\varphi(t)$ pour avoir $\|\tilde{\varphi}-\tilde{\psi}\| \leqslant \int_{a_0}^{a_1}[L_1(t)+L_2(t)]dt\|\varphi-\psi\| \leqslant B_0\|\varphi-\psi\|$.

D'après le théorème de Banach sur le point fixe, l'équation (3) a exactement une solution $\varphi_0(t)$ satisfaisant à la condition (5). On peut construire cette solution par la méthode des approximations successives. On peut construire d'une manière analogue la solution $\varphi_1(t)$ de l'équation (3) dans l'intervalle fermé $\langle a_1, a_2\rangle$ satisfaisant à la condition initiale $\varphi_1(a_1) = \varphi_0(a_1)$, où $\varphi_0(t)$ est la solution trouvée de l'équation (3) dans l'intervalle $\langle a_0, a_1\rangle$. Il suffit de montrer que

$$\varphi_1'(a_1) = \varphi_0'(a_1). \tag{17}$$

Les égalités $\varphi_1(a_1) = \varphi(a_1)$ et $h(a_1) = a_1$ entraînent en vertu de l'hypothèse sur la continuité de la fonction $f(t, x, y)$

$$\lim_{t\to a_1-0} f\big(t, \varphi(t), \varphi(h(t))\big) = \lim_{t\to a_1+0} f\big(t, \varphi_1(t), \varphi_1(h(t))\big),$$

d'où l'égalité (17). Reste à procéder par induction en appliquant la même méthode pour tout $\langle a_i, a_{i+1}\rangle$ où $i \geqslant 2$.

Remarque 4. Un théorème analogue sur l'équation (3) a été établi en 1953 par Doss et Nasr [5] en admettant que $h(t)-t = \text{const} > 0$, que $\int_a^\infty [L_1(t)+L_2(t)]dt = B < 1$ et qu'il existe un point (x_0, y_0) pour lequel $\int_a^\infty |f(t, x_0, y_0)|\,dt < \infty$. Ce théorème a été étendu par Błaż [3] aux systèmes des équations dans lesquels $h(t)-t \geqslant 0$.

TRAVAUX CITÉS

[1] A. Bielecki, *Certaines conditions suffisantes pour l'existence d'une solution de l'équation* $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t), \varphi(h(t)))$, Folia Societatis Scientiarum Lublinensis 2 (1962), p. 70-73.

[2] — et A. Dłotko, *Sur certaines équations fonctionnelles,* Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska 15 (1961), p. 97-106.

[3] J. Błaż, *O istnieniu i ograniczoności rozwiązań układów równań różniczkowych z przyśpieszonym argumentem,* Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Katowicach 3 (1961), p. 7-11.

[4] T. Dłotko, *Sur certaines équations différentielles du n-ième ordre,* Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska 16 (1962), sous presse.

[5] S. Doss and S. K. Nasr, *On the functional equation* $dy/dx = f(x, y(x), y(x+h))$, $h > 0$, American Journal of Mathematics 4 (1953), p. 713-716.

[6] А. Э. Эльсгольц, *Качественные методы в математическом анализе,* Москва 1955.

[7] Г. А. Каменский, *Об уравнениях с отклоняющимися аргументами,* Ученые записки Московского Государственного Университета 9 (1959), p. 205-210.

[8] А. Д. Мышкис, *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом,* Москва 1951.

[9] А. Б. Штыкан, *О графическом решении дифференциальных уравнений опережающим аргументом,* Успехи математических наук 13 (1960), p. 193-206.

[10] А. М. Зверкин, Г. А. Каменский и С. Б. Норкин, *О постановке начальной задачи для дифференциальных уравнений с опережающим аргументом,* ibidem 15 (1960), p. 133-136.

[11] H. Whitney, *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets,* Transactions of the American Mathematical Society 36 (1934), p. 63-89.

Reçu par la Rédaction le 9. 7. 1961; en version modifiée le 19. 11. 1962