schaften zu Wien, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse, Abteilung IIa, 126 (1917), p. 247-263.

[4] H. Waadeland, *Über ein Koeffizientenproblem für schlichte Abbildungen des* $|\mathfrak{z}| > 1$, Det Kongelige Norske Videnskabers Selskabs Forhandlinger 30 (1957), p. 168-170.

[5] R. Zawadzki, *Sur le module des coefficients* B_0 *et* B_1 *des fonctions holomorphes univalentes, bornées inférieurement*, ibidem 12, n° 5 (1961), p. 1-9.

[6] — *Sur la fonctionnelle* $||B_1|-|B_0||$ *définie dans la famille des fonctions univalentes holomorphes, bornées inférieurement*, Bulletin de la Société des Sciences et des Lettres de Łódź 12, n° 6 (1961), p. 1-15.

Reçu par la Rédaction le 22. 4. 1963

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XI 1964 FASC. 2

ÉVALUATION DE LA FONCTIONNELLE $|\log(\Phi(z_1)-\Phi(z_2))/(z_1-z_2)|$ *DANS LA FAMILLE DES FONCTIONS UNIVALENTES ET BORNÉES INFÉRIEUREMENT DANS LE CERCLE* $K(\infty, 1)$

PAR

W. JANOWSKI (ŁÓDŹ)

Désignons par Σ la famille des fonctions de la forme

$$\Phi(z) = z+C_0+\frac{C_1}{z}+\frac{C_2}{z^2}+\ldots, \quad \text{où} \quad |z|>1,$$

holomorphes pour $z \neq \infty$ et univalentes, et par $\Sigma(m)$, où m est un nombre tel que $0 \leqslant m \leqslant 1$ et d'ailleurs arbitraire, la partie de cette famille composée de fonctions assujetties à la condition $|\Phi(z)| \geqslant m$.

Golusin [1] a démontré que, dans la famille Σ, on a pour z_1 et z_2 appartenant au cercle $K(\infty, 1)$ et tels que $|z_1| = |z_2| = \varrho$ l'évaluation exacte

$$K(\Phi) = \left|\log\frac{\Phi(z_1)-\Phi(z_2)}{z_1-z_2}\right| \leqslant -\log\left(1-\frac{1}{\varrho^2}\right).$$

Je vais démontrer le théorème suivant: *Pour les fonctions* $\Phi(z)$ *de la famille* $\Sigma(m)$, *on a l'inégalité*

$$|K(\Phi)| \leqslant \left(\prod_{j=1}^{2}\log\frac{1-m^2/|\Phi(z_j)|^2}{1-1/|z_j|^2}\right)^{1/2}.$$

Démonstration. Pour considérer les problèmes extrémaux dans la famille $\Sigma(m)$, il suffit de se borner à la partie $\Sigma^*(m)$ de cette famille, composée de fonctions de la forme

$$W(z,t) = e^{-t}\Phi(z,t) = z+B_0+\frac{B_1}{z}+\ldots$$

où $t = -\log m$ (voir Löwner [2]). Les fonctions $\Phi(z,t)$ satisfont à l'équation de Löwner

$$(1) \qquad \frac{\partial\Phi(z,t)}{\partial t} = \Phi(z,t)\,\frac{\Phi(z,t)+k(t)}{\Phi(z,t)-k(t)}$$

où t est une variable réelle, $k(t) = e^{i\theta(t)}$, $\theta(t)$ étant une fonction complexe continue dans un intervalle $0 < t < t_0$, et où $\Phi(z, 0) = z$.

Posons

$$\Phi_n = \Phi(z_n, t) \quad \text{et} \quad \Phi_n' = \frac{\partial \Phi(z_n, t)}{\partial t} \qquad \text{pour} \qquad n = 1 \text{ et } 2.$$

L'équation de Löwner entraîne

$$\frac{\Phi_1' - \Phi_2'}{\Phi_1 - \Phi_2} = \frac{\Phi_1\Phi_2\bar{k} - (\Phi_1 + \Phi_2)\bar{k} - 1}{(\Phi_1\bar{k} - 1)(\Phi_2\bar{k} - 1)} \qquad \text{où} \qquad k = k(t).$$

En posant

$$W_j = W(z_j, t) \qquad \text{et} \qquad W_j' = \frac{\partial W(z_j, t)}{\partial t} \qquad \text{pour} \qquad j = 1 \text{ et } 2,$$

on a donc

$$\frac{W_1' - W_2'}{W_1 - W_2} = -\frac{2}{(W_1 e^t\bar{k} - 1)(W_2 e^t\bar{k} - 1)}. \tag{2}$$

L'intégration de (2) sous la condition que $W(z, 0) = z$ conduit au résultat suivant:

$$\log \frac{W_1 - W_2}{z_1 - z_2} = -2\int_0^t \frac{dt}{(W_1 e^t\bar{k} - 1)(W_2 e^t\bar{k} - 1)}.$$

Il est facile de montrer que

$$\frac{\partial}{\partial t}\log\left(1 - \frac{e^{-2t}}{W_1\overline{W}_2}\right) = \frac{2}{(W_1 e^t\bar{k} - 1)(\overline{W}_2 e^t k - 1)}.$$

Vu que $t = -\log m$, il en résulte que

$$\log \frac{1 - m^2/W_1\overline{W}_2}{1 - 1/z_1\bar{z}_2} = 2\int_0^t \frac{dt}{(W_1 e^t\bar{k} - 1)(W_2 e^t k - 1)}. \tag{3}$$

En tenant compte de (2) et de l'inégalité de Schwarz, il vient

$$\left|\log \frac{W_1 - W_2}{z_1 - z_2}\right| \leqslant 2\int_0^t \frac{dt}{|W_1 e^t\bar{k} - 1|\,|W_2 e^t\bar{k} - 1|} \leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt{\int_0^t \frac{dt}{|W_1 e^t\bar{k} - 1|^2} \cdot \int_0^t \frac{dt}{|W_2 e^t\bar{k} - 1|^2}},$$

d'où

$$\left|\log \frac{W_1 - W_2}{z_1 - z_2}\right|^2 \leqslant \int_0^t \frac{2dt}{(W_1 e^t\bar{k} - 1)(\overline{W}_1 e^t k - 1)} \cdot \int_0^t \frac{2dt}{(W_2 e^t\bar{k} - 1)(W_2 e^t k - 1)}.$$

On a donc d'après (3) l'évaluation

$$\left|\log \frac{W_1 - W_2}{z_1 - z_2}\right|^2 \leqslant \log \frac{1 - m^2/|W_1|^2}{1 - 1/\varrho^2}\log \frac{1 - m^2/|W_2|^2}{1 - 1/\varrho^2} \tag{4}$$

où $\varrho = |z_1| = |z_2|$.

Je vais montrer que l'évaluation (4) est exacte.

Remarquons d'abord que, vu (3), pour qu'on ait dans (4) le signe d'égalité, il faut et il suffit que les expressions

$$W_1 e^t\bar{k} - 1 = R_1 e^{i\psi_1} \qquad \text{et} \qquad W_2 e^t\bar{k} - 1 = R_2 e^{i\psi_2} \tag{5}$$

soient conjuguées: $R_1 = R_2 = R$ et $\psi_2 = -\psi_1 = -\psi$. En effet, on a en vertu de (2)

$$\left|\log \frac{W_1 - W_2}{z_1 - z_2}\right| = 2\left|\int_0^t \frac{dt}{R^2}\right|,$$

mais en vertu de (3)

$$2\int_0^t \frac{dt}{R^2} = \log \frac{1 - m^2/|W_1|^2}{1 - 1/\varrho^2},$$

donc

$$\left|\log \frac{W_1 - W_2}{z_1 - z_2}\right| = \log \frac{1 - m^2/|W_1|^2}{1 - 1/\varrho^2} = \log \frac{1 - m^2/|W_2|^2}{1 - 1/\varrho^2},$$

d'où le signe d'égalité dans (4). Ceci établi, on a pour $R_1 = R_2 = R$, $\psi_2 = -\psi$ et $\psi_1 = \psi$ en vertu de (5)

$$\overline{\Phi(z, t)}k(t) = \Phi(z_2, t)\overline{k(t)}, \tag{6}$$

donc

$$|\Phi_1| = |\Phi_2|.$$

En outre, on a pour $t = 0$ en vertu de (6)

$$\bar{z}_1 k(0) = z_2\overline{k(0)}. \tag{7}$$

Posons

$$z_1 = \varrho e^{i\alpha_1}, \qquad z_2 = \varrho e^{i\alpha_2}, \qquad \psi = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2},$$

$$\Phi(z_1, t) = Ae^{i\beta_1} \qquad \text{et} \qquad \Phi(z_2, t) = Ae^{i\beta_2}.$$

On a alors d'après (6) $Ae^{-i\beta_1}k(t) = Ae^{i\beta_2}\overline{k(t)}$, d'où

$$k^2(t) = e^{i(\beta_1+\beta_2)} = \frac{\Phi(z_1, t)\Phi(z_2, t)}{A^2}.$$

En admettant l'égalité

$$k^2(t) = \frac{z_1 z_2}{\varrho^2} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0, \tag{8}$$

on a donc

$$\frac{\Phi(z_1, t)\Phi(z_2, t)}{A^2} = \frac{z_1 z_2}{\varrho^2}.$$

On peut déterminer à présent la fonction extrémale à l'aide de l'équation (1), dans laquelle la fonction $k(t)$ est celle donnée par (8). En intégrant l'équation (1), où $k(t)$ est la fonction en question, il vient

$$\int_0^t \frac{\Phi(z, t)-k(t)}{\Phi(z, t)+k(t)} \frac{dt}{\Phi(z, t)} = t,$$

d'où l'on tire par des calculs évidents l'équation fonctionnelle

$$\frac{[\Phi(z, t)+k(t)]^2}{\Phi(z, t)} = e^t \frac{[z+k(t)]^2}{z}.$$

En posant

$$k(t) = e^{i\gamma}, \quad \gamma = \frac{a_1+a_2}{2} \quad \text{et} \quad \varphi(z) = \frac{(1+z)^2}{z},$$

on vérifie aisément que la fonction extrémale $W^*(z) = m\Phi^*(z, t)$ est de la forme

$$W^*(z) = me^{i\gamma}\Phi^{-1}\left[\frac{1}{m}\varphi(ze^{-i\gamma})\right] = z+2e^{i\gamma}(1-m)+e^{2i\gamma}\frac{1-m^2}{z}+\ldots$$

TRAVAUX CITÉS

[1] Г. М. Голузин, *О теоремах искажения и коэффициентах однолистных функций*, Математический Сборник 19 (1946), p. 183-202.

[2] K. Löwner, *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises*, Mathematische Annalen 89 (1923), p. 103-121.

Reçu par la Rédaction le 22. 4. 1962

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XI 1964 FASC. 2

TO THE MEMORY OF A. N. MILGRAM

ON THE INCLINATION OF A MINIMAL SURFACE $\varphi(x, y)$ *

BY

R. FINN (STANFORD, CALIFORNIA)

It has been known since the pioneering work of J. Schauder that the derivatives of a solution of a linear elliptic partial differential equation

$$\text{(1)} \quad \begin{array}{ll} \text{(a)} & a\varphi_{xx}+2b\varphi_{xy}+c\varphi_{yy}+d\varphi_x+e\varphi_y+f\varphi = 0, \\ \text{(b)} & ac-b^2 > k^2 > 0, \end{array}$$

are bounded interior to the domain of definition if the solution $\varphi(x, y)$ is bounded in the whole domain. In fact, as has been shown by Bers and Nirenberg [2], the bound depends only on a bound for the coefficients, on k, and on distance to the boundary. In this form, the estimate can be used to study the (non-linear) case in which the coefficients depend not only on (x, y) but also on the solution and its derivatives.

On the other hand, I have shown by example in [3] that weaker assumptions will in general not suffice to obtain a bound even on the first derivatives of the solution.

Important non-linear equations of the form (1a), which arise in practice, satisfy (1b) only in the restricted sense that $ac-b^2 > 0$ for every solution. Since physical and heuristic considerations suggest that estimates of the sort we have mentioned will hold also for these equations, it seems desirable to study particular such equations with a view to developing an appropriate theory. An initial step in this direction was taken in my paper [3], in which, in particular, I derived bounds on the derivatives of the solutions of the *minimal surface equation*

$$\frac{1+v^2}{W}\varphi_{xx}-2\frac{uv}{W}\varphi_{xy}\frac{1+u^2}{W}\varphi_{yy} = 0, \tag{2}$$

$$u = \varphi_x, \quad v = \varphi_y, \quad W = \sqrt{1+u^2+v^2},$$

* Presented to the Third Conference on Analytic Functions held in Cracow, 30. VIII. - 4. IX. 1962. This investigation was supported in part by the Office of Naval Research.