COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XI 1964 FASC. 2

SUR UNE ÉVALUATION DES COEFFICIENTS DES FONCTIONS HOLOMORPHES UNIVALENTES ET BORNÉES INFÉRIEUREMENT DANS LE CERCLE $K(\infty, 1)$

PAR

W. JANOWSKI (ŁÓDŹ)

Désignons par $\Sigma(m)$ où $0 \leqslant m \leqslant 1$ la famille des fonctions de la forme

$$\Phi(z) = z + C_0 + \frac{C_1}{\mathfrak{z}_1} + \frac{C_2}{\mathfrak{z}_2} + \ldots \quad \text{où} \quad |\mathfrak{z}| > 1,$$

holomorphes pour $\mathfrak{z} \neq \infty$, univalentes et assujetties à la condition $|\Phi(\mathfrak{z})| \geqslant m$, où $0 \leqslant m \leqslant 1$. Soit C_n^* où $n = 0, 1, 2, \ldots$ le plus petit nombre pour lequel on a

$$(1) \qquad |C_n| \leqslant C_n^*$$

quand $\Phi(\mathfrak{z})$ parcourt la famille $\Sigma(m)$. Il résulte du théorème de Pick [3] l'évaluation exacte $|C_0| \leqslant 2(1-m)$ et Zawadzki [5] a démontré que $C_1| \leqslant 1-m^2$ et que la limite est atteinte. Ainsi,

$$C_0^* = 2(1-m) \quad \text{et} \quad C_1^* = 1-m^2.$$

En général, on ne sait rien sur les nombres C_n^* pour $n = 2, 3, \ldots$, mais on peut donner l'évaluation inférieure de ces nombres. Je vais démontrer le théorème suivant: *Pour les fonctions de la famille $\Sigma(m)$, on a les inégalités*

$$(2) \qquad C_{2p-1}^* \geqslant \begin{cases} \dfrac{1}{p}(1-m^2) & \textit{lorsque} \quad p \geqslant 1 \textit{ et } m \geqslant \exp\left(-\dfrac{2p}{p-1}\right), \\ \dfrac{1}{p}(2\beta^2+1+m^2-4\beta m) & \textit{lorsque } p > 1 \textit{ et } m \leqslant \exp\left(-\dfrac{2p}{p-1}\right), \end{cases}$$

$$(3) \qquad C_{2p}^* \geqslant \frac{2}{2p+1}(1-m) \quad \textit{lorsque} \quad 0 \leqslant m \leqslant 1,$$

β étant la plus grande racine de l'équation

$$\beta\log\beta+\frac{p+1}{p-1}\beta+m=0.$$

Démonstration. Il suffit de montrer qu'il existe une sous-famille de $\Sigma(m)$ telle que pour certaines des fonctions qui y appartiennent, C_{2p-1} et C_{2p} sont égaux aux membres droits des inégalités (2) et (3) respectivement, tandis que pour toutes les autres fonctions appartenant à cette sous-famille, C_{2p-1} et C_{2p} ont les modules inférieurs à ceux des membres droits des mêmes inégalités respectivement.

Considérons la famille $F(1/m)$ des fonctions de la forme

$$F(z)=z+A_2z^2+\ldots \quad \text{où} \quad |z|<1,$$

univalentes et assujetties à la condition $|F(z)|<1/m$. On peut faire correspondre à toute fonction de cette famille la fonction

$$\Phi_p(\mathfrak{z})=[F(\mathfrak{z}^p)]^{-1/p} \quad \text{où} \quad \mathfrak{z}=1/z,$$

p étant un nombre naturel arbitraire. La fonction $\Phi_p(\mathfrak{z})$ appartient à la famille $\Sigma(m)$ des fonctions p-symétriques, c'est-à-dire

$$\Phi_p(\mathfrak{z})=\mathfrak{z}+\frac{C_{p-1}^{(p)}}{\mathfrak{z}^{p-1}}+\frac{C_{2p-1}^{(p)}}{\mathfrak{z}^{2p-1}}+\ldots$$

On a évidemment $\Sigma_p(m)\subset\Sigma(m)$,

$$C_{p-1}^{(p)}=-A_2/p, \tag{4}$$

$$C_{2p-1}^{(p)}=\frac{p+1}{2p^2}A_2^2-\frac{A_3}{p}. \tag{5}$$

Vu la limitation exacte $|A_2|\leqslant 2(1-1/M)$, on obtient l'évaluation suivante:

$$|C_{p-1}^{(p)}|\leqslant\frac{2}{p}(1-m), \tag{6}$$

d'où, en posant $p=n+1$, il vient

$$|C_n^*|\geqslant\frac{2}{n+1}(1-m) \quad \text{pour} \quad n=0,1,\ldots \tag{7}$$

En généralisant mon résultat [2] sur l'évaluation exacte du module $|A_{2p+1}^{(p)}|$ pour la fonction

$$F(z)=z+A_{p+1}^{(p)}z^{p+1}+A_{2p+1}^{(p)}z^{2p+1}+\ldots$$

holomorphe, univalente, p-symétrique dans le cercle $|z|<1$ et bornée en module par le nombre $M>1$, Jakubowski [1] a démontré que l'on a pour les fonctions appartenant à la classe $F(1/m)$

$$|A_3-aA_2^2|\leqslant\begin{cases}1-m^2 & \text{lorsque} \quad \dfrac{1}{m}\leqslant e^{1/(1-a)},\\[2mm] 2\beta^2+1+m^2-4\beta m & \text{lorsque} \quad \dfrac{1}{m}\geqslant e^{1/(1-a)},\end{cases} \tag{8}$$

où $0\leqslant a<1$ et β est la plus grande racine de l'équation

$$\beta\log\beta+\frac{a}{1-a}\beta+m=0,$$

et que les limites sont atteintes. Zawadzki [6] a complété ce résultat pour le cas $a=1$ et obtenu l'évaluation exacte

$$|A_3-A_2^2|\leqslant 1-m^2. \tag{9}$$

On a donc en vertu de (5), (8) et (9)

$$|C_{2p-1}^{(p)}|\leqslant\begin{cases}\dfrac{1}{p}(1-m^2) & \text{lorsque} \quad p\geqslant 1 \text{ et } m\geqslant e^{-2/(p-1)},\\[2mm] \dfrac{1}{p}(2\beta^2+1+m^2-4\beta m) & \text{lorsque} \quad p>1 \text{ et } m\leqslant e^{-2/(p-1)}.\end{cases}$$

Par conséquent,

$$|C_{2p-1}^{*(p)}|\geqslant\begin{cases}\dfrac{1}{p}(1-m^2) & \text{lorsque} \quad p\geqslant 1 \text{ et } m\geqslant e^{-2p/(p-1)},\\[2mm] \dfrac{1}{p}(2\beta^2+1+m^2-4\beta m) & \text{lorsque} \quad p>1 \text{ et } m\leqslant e^{-2p/(p-1)}.\end{cases} \tag{10}$$

Reprenons l'inégalité (7). Pour $n=2p$, elle coïncide avec (3) et, pour $n=2p-1$, le membre droit de (7) est inférieur à ceux de (10), qui sont les mêmes que ceux de (2).

Dans le cas limite $m=0$, on obtient le résultat de Waadeland [4].

TRAVAUX CITÉS

[1] Z. Jakubowski, *Le maximum d'une fonctionnelle dans la famille des fonctions univalentes bornées*, Colloquium Mathematicum 7 (1959), p. 127-128.

[2] W. Janowski, *Le maximum des coefficients B_2 et B_3 des fonctions univalentes k-symétriques bornées*, Annales Polonici Mathematici 2 (1955), p. 161-169.

[3] G. Pick, *Über die konforme Abbildung eines Kreises auf ein schlichtes und zugleich beschränktes Gebiet*, Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissen-

schaften zu Wien, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse, Abteilung IIa, 126 (1917), p. 247-263.

[4] H. Waadeland, *Über ein Koeffizientenproblem für schlichte Abbildungen des* $|\mathfrak{z}| > 1$, Det Kongelige Norske Videnskabers Selskabs Forhandlinger 30 (1957), p. 168-170.

[5] R. Zawadzki, *Sur le module des coefficients* B_0 *et* B_1 *des fonctions holomorphes univalentes, bornées inférieurement*, ibidem 12, n° 5 (1961), p. 1-9.

[6] — *Sur la fonctionnelle* $||B_1|-|B_0||$ *définie dans la famille des fonctions univalentes holomorphes, bornées inférieurement*, Bulletin de la Société des Sciences et des Lettres de Łódź 12, n° 6 (1961), p. 1-15.

Reçu par la Rédaction le 22. 4. 1963

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XI 1964 FASC. 2

ÉVALUATION DE LA FONCTIONNELLE $|\log(\Phi(z_1)-\Phi(z_2))/(z_1-z_2)|$ DANS LA FAMILLE DES FONCTIONS UNIVALENTES ET BORNÉES INFÉRIEUREMENT DANS LE CERCLE $K(\infty, 1)$

PAR

W. JANOWSKI (ŁÓDŹ)

Désignons par Σ la famille des fonctions de la forme

$$\Phi(z) = z+C_0+\frac{C_1}{z}+\frac{C_2}{z^2}+\ldots, \quad \text{où} \quad |z|>1,$$

holomorphes pour $z \neq \infty$ et univalentes, et par $\Sigma(m)$, où m est un nombre tel que $0 \leqslant m \leqslant 1$ et d'ailleurs arbitraire, la partie de cette famille composée de fonctions assujetties à la condition $|\Phi(z)| \geqslant m$.

Golusin [1] a démontré que, dans la famille Σ, on a pour z_1 et z_2 appartenant au cercle $K(\infty, 1)$ et tels que $|z_1| = |z_2| = \varrho$ l'évaluation exacte

$$K(\Phi) = \left|\log\frac{\Phi(z_1)-\Phi(z_2)}{z_1-z_2}\right| \leqslant -\log\left(1-\frac{1}{\varrho^2}\right).$$

Je vais démontrer le théorème suivant: *Pour les fonctions* $\Phi(z)$ *de la famille* $\Sigma(m)$, *on a l'inégalité*

$$|K(\Phi)| \leqslant \left(\prod_{j=1}^{2}\log\frac{1-m^2/|\Phi(z_j)|^2}{1-1/|z_j|^2}\right)^{1/2}.$$

Démonstration. Pour considérer les problèmes extrémaux dans la famille $\Sigma(m)$, il suffit de se borner à la partie $\Sigma^*(m)$ de cette famille, composée de fonctions de la forme

$$W(z,t) = e^{-t}\Phi(z,t) = z+B_0+\frac{B_1}{z}+\ldots$$

où $t = -\log m$ (voir Löwner [2]). Les fonctions $\Phi(z,t)$ satisfont à l'équation de Löwner

$$\frac{\partial\Phi(z,t)}{\partial t} = \Phi(z,t)\frac{\Phi(z,t)+k(t)}{\Phi(z,t)-k(t)} \tag{1}$$