Ce fascicule, rédigé avec concours de Witold Kleiner, contient les travaux présentés à la Troisième Conférence sur les Fonctions Analytiques (Cracovie, 30. VIII - 4. IX. 1962) et quelques autres qui s'y rattachent.

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XI 1964 FASC. 2

QUELQUES RÉSULTATS RÉCENTS SUR LES MAJORANTES DANS LA THÉORIE DES FONCTIONS HOLOMORPHES

PAR

A. BIELECKI (LUBLIN)

Cette communication * a pour but de signaler et de discuter succintement quelques résultats concernant les majorantes de fonctions holomorphes, surtout ceux établis récemment à Lublin.

Admettons dans tout ce qui va suivre que $f(z) = a_1z+a_2z^2+\ldots$ et $F(z) = A_1z+A_2z^2+\ldots$, $A_1 \neq 0$, sont deux fonctions holomorphes dans le cercle $C_1 = \{z: |z| < 1\}$. La fonction $f(z)$ sera dite *majorée par la fonction* $F(z)$ ou *subordonnée* à elle dans le cercle $C_\varrho = \{z: |z| < \varrho\}$ où $\varrho \in (0, 1)$, ce que nous écrirons $f \prec_\varrho F$, lorsqu'il existe une troisième fonction $\sigma(z) = \alpha_0+\alpha_1z+\ldots$ où $\alpha_0 \geqslant 0$, holomorphe dans C_ϱ et telle que $|\sigma(z)| \leqslant 1$ et $f(z) = F\big(z\cdot\sigma(z)\big)$ dans C_ϱ. Si, en particulier, $F(z)$ est une fonction univalente dans C_ϱ, la condition $f \prec_\varrho F$ entraîne évidemment les deux suivantes:

$$a_1 = 0 \quad \text{ou bien} \quad \arg a_1 = \arg A_1, \qquad f(C_\varrho) \subset F(C_\varrho).$$

Réciproquement, les deux conditions étant satisfaites, il suffit de poser $\varphi(z) = z\cdot\sigma(z) = F^{-1}\big(f(z)\big)$, de constater qu'alors $\varphi(C_\varrho) \subset C_\varrho$ et de faire appel au lemme de Schwarz, pour montrer que $|\varphi(z)| \leqslant |z|$ dans C_ϱ, d'où $f \prec_\varrho F$.

La fonction $f(z)$ sera dite *majorée en module* par la fonction $F(z)$ dans C_ϱ, ce que nous écrirons $|f| \prec_\varrho |F|$, lorsqu'il existe une fonction $\sigma(z) = \alpha_0+\alpha_1z+\ldots$ où $\alpha_0 \geqslant 0$, holomorphe et satisfaisant aux conditions $|\sigma(z)| \leqslant 1$ et $f(z) = F(z)\cdot\sigma(z)$ dans C_ϱ, d'où $|f(z)| \leqslant |F(z)|$ pour $|z| < \varrho$.

C'était Biernacki (voir [5] et [6]) qui avait attiré l'attention des mathématiciens sur des relations entre les deux types de majoration. Il a démontré en 1935 et 1936 les théorèmes suivants:

1. *Il existe un nombre* $r_0 \in (\frac{1}{4}, 1)$ *tel que* $|f| \prec_{r_0} |F|$ *lorsque* $f \prec_1 F$ *et que la fonction* F *est univalente dans* C_1.

---

* Présentée à la troisième Conférence sur les Fonctions Analytiques, tenue à Cracovie, 30. VIII - 4. IX. 1962.

2. *Si les deux fonctions $f(z)$ et $F(z)$ sont univalentes dans C_1 et $f \prec_1 F$, on a $|f| \prec_r |F|$ où $r = 0{,}390\ldots$ est la racine unique de l'équation*

$$\ln(1+r)-\ln(1-r)+2\operatorname{arctg} r = \pi/2, \qquad 0<r<1, \tag{1}$$

et r ne peut pas être remplacé par aucun nombre plus grand.

3. *Si, en outre, la fonction $F(z)$ est étoilée ou convexe, on doit prendre respectivement, au lieu de r, la racine r^* de l'équation $4\operatorname{arctg} r^* = \pi/2$ ou la racine r^c de l'équation $\arcsin r^c + 2\operatorname{arctg} r^c = \pi/2$.*

Le théorème 1 a été précisé par Golusin (voir [7], p. 330) et Shah Tao-shing [10]. Le premier a démontré que $0{,}35 < r_0 < 0{,}386\ldots = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$ et que cette borne supérieure est la valeur précise de la constante r_0 figurant dans le théorème 1 dans le cas particulier où la fonction $F(z)$ est supposée étoilée dans C_1. Le second a prouvé qu'il en est de même dans le cas général, c'est-à-dire lorsque la fonction $F(z)$ n'est supposée qu'univalente.

Lewandowski, un des élèves de Biernacki, a posé la question réciproque suivante: la fonction $f(z)$ étant supposée holomorphe et majorée en module par une fonction $F(z)$ univalente dans C_1, existe-t-il un nombre $R \in (0,1)$ tel que l'on ait $f \prec_R F$?

La réponse est affirmative, Lewandowski (voir [8] et [9]) a établi en effet deux théorèmes suivants:

I. *Il existe une constante positive R satisfaisant aux trois conditions:*

1° *$R_1 < R < R_2$, où $R_1 > 0{,}21$ et $R_2 < 0{,}3$ sont les racines des équations*

$$\frac{2x}{1+x^2}-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\sqrt{1-\frac{1}{4}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^4} = 0 \qquad \text{et} \qquad x^3+x^2+3x = 1$$

respectivement.

2° *si $f(z)$ est majorée en module dans C_1 par une fonction univalente $F(z)$, on a $f \prec_R F$.*

3° *la constante R ne peut être remplacée par aucune autre plus grande.*

II. *Dans le cas particulier, où la fonction $F(z)$ est univalente et étoilée dans C_1, on a $R = R_2 = 0{,}29\ldots$*

Il est clair que le théorème I n'est pas définitif, car la constante R n'y est déterminée qu'approximativement. Cependant, nous avons, Lewandowski et moi-même, réussi récemment à prouver que la constante optimale R y doit être égale à R_2.

Un autre résultat est dû à E. Złotkiewicz et concerne le cas où la fonction $F(z)$ appartient à la classe des fonctions univalentes et $\frac{1}{2}$-étoilées dans C_1. Une fonction $f(z)$ définie dans C_1 y est dite a-étoilée lorsque

$\operatorname{Re}\{zF'(z)/F(z)\} > a$ où $0 \leqslant a < 1$ (cf. Wu Žwao-Jen [11]). Dans le cas de $a = 0$, cela veut dire que la fonction $F(z)$ est étoilée tout court. La classe des fonctions $\frac{1}{2}$-étoilées comprend toutes les fonctions convexes.

Dans les théorèmes I et II, les fonctions majorées $f(z)$ ne sont supposées que holomorphes dans C_1. Cependant, elles peuvent être supposées de même famille que le sont les fonctions majorantes $F(z)$. En voici trois résultats de Lewandowski et moi-même dans cet ordre d'idées:

III. *Lorsque les fonctions $f(z)$ et $F(z)$ sont a-étoilées où $0 \leqslant a < 1$, et que $|f| \prec_1 |F|$, on a $f \prec_{R(a)} F$ où $R(a)$ est une racine bien déterminée de l'équation*

$$\arcsin\frac{2x}{1+x^2+\dfrac{a}{1-a}(1-x^2)}+2\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \qquad 0<x<1, \tag{2}$$

et qui ne peut être remplacée par aucun nombre plus grand (voir [1], p. 53).

IV. *Dans le cas plus général dans lequel les fonctions $f(z)$ et $F(z)$ ne sont supposées qu'univalentes, la constante $R(a)$ est remplacée par le nombre $R = r = 0{,}390\ldots$ satisfaisant à l'équation* (1) (voir [3], p. 301).

V. *$\omega(x)$ étant une fonction réelle, pas nécessairement finie, non-décroissante, semi-continue inférieurement pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et telle que $\omega(0) = 0$, posons*

$$r(\omega) = \sup\{x\colon 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \omega(x)+2\operatorname{arctg} x < \pi/2\}$$

et désignons par $\mathscr{F}_\omega$ la famille de toutes les fonctions $f(z) = a_1z+a_2z^2+\ldots$, où $a_1 \neq 0$, holomorphes dans C_1 et telles que

$$|\arg[zf'(z)/f(z)]| \leqslant \omega(x) \qquad \textit{pour} \qquad 0<|z|\leqslant x,$$

où $0 < x \leqslant 1$ et où l'on admet que $\arg\zeta = \infty$ pour $\zeta = 0$ et pour $\zeta = \infty$.

Alors, si les fonctions $f(z)$ et $F(z)$ appartiennent à la famille $\mathscr{F}_\omega$ et $|f| \prec_1 |F|$, on a $f \prec_{r(\omega)} F$.

Contrairement aux théorèmes III et IV, le théorème V n'est pas définitif, car il laisse de côté la question importante, si et sous quelles conditions la constante $r(\omega)$ est la plus grande possible dans le cas qu'il concerne. On ne peut pas, bien entendu, préciser ce problème sans se servir d'hypothèses supplémentaires sur la fonction $\omega(x)$ et ses relations avec la famille $\mathscr{F}_\omega$.

Cependant, le théorème V se laisse généraliser en remplaçant la condition $a_0 \geqslant 0$ par la condition moins restrictive $0 < |a_0| < 1$. Mais la définition du rayon $r(\omega)$ doit être alors remplacée par une autre, beaucoup plus compliquée.

Nous avons fait intervenir dans la démonstration du théorème V l'homotopie $\Phi(t, z)$ telle que $\Phi(0, z) = f(z)$ et $\Phi(1, z) = F(z)$ et que, pour un z fixé, le module $|\Phi(t, z)|$ croît avec t. Nous avons posé

$$\Phi(z, t) = \begin{cases} [f(z)]^{1-t}[F(z)]^t & \text{pour} \quad z \neq 0, \\ 0 & \text{pour} \quad z = 0, \end{cases}$$

ce qui a permis de montrer par un simple calcul que $\Phi(t, z) \prec_{r(\omega)} \Phi(s, z)$ pour $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1$, d'où la thèse du théorème.

Une méthode analogue nous a conduit entre autres aux généralisations suivantes (voir [2] et [4]) des trois théorèmes de Biernacki précités:

VI. *Lorsque* $F(z) = z + A_2 z^2 + \ldots \in \mathcal{F}_\omega$ *et que la fonction* $f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \ldots$ *où* $a_n > 0$ *est holomorphe dans* C_1 *et telle que* $f(z) \neq 0$ *pour* $z \neq 0$, *la relation* $f(z) \prec_1 F(z)$ *entraîne la relation* $|f(z)| \prec_{r(\omega)} |F(z^n)|$.

La restriction $a_n > 0$ peut être remplacée dans ce théorème par la condition plus faible $0 < |a_n| < 1$. Comme auparavant, le théorème VI ainsi généralisé subsiste à condition de modifier la définition de la constante $r(\omega)$ d'une manière convenable (voir [4]).

En posant $n = 1$ dans le théorème VI et en appliquant les évaluations bien connues de l'expression $|\arg\{zF'(z)/F(z)\}|$, on en déduit sous des hypothèses un peu plus faibles les thèses des théorèmes 1-3 de Biernacki concernant l'existence des constantes r, r^* et r^c. Les exemples donnés par Biernacki dans [5] et [6] montrent que ces constantes sont les plus grandes possibles. L'exemple analogue donné par nous dans [1] concerne le cas où la fonction $f(z)$ est α-étoilée. Cela suffit pour démontrer le théorème

VII. *Lorsque la fonction* $F(z) = z + A_2 z^2 + \ldots$ *est* α*-étoilée dans* C_1, *que* $a_1 > 0$, *que* $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \neq 0$ *pour* $z \neq 0$ *et que* $f \prec_1 F$, *on a* $f \prec_{R(\alpha)} F$ *où* $R(\alpha)$ *est la racine de l'équation* (2) *et ne peut être remplacée par aucun nombre plus élevé.*

TRAVAUX CITÉS

[1] A. Bielecki et Z. Lewandowski, *Sur certaines familles de fonctions α-étoilées*, Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 15 (1961), p. 45-55.

[2] — *Sur une généralisation de quelques théorèmes de M. Biernacki sur les fonctions analytiques*, Annales Polonici Mathematici 12 (1962), p. 65-70.

[3] — *Sur certaines majorantes des fonctions holomorphes dans le cercle unité*, Colloquium Mathematicum 9 (1962), p. 299-303.

[4] — *Sur un type de fonctions holomorphes subordonnées*, Folia Societatis Scientiarum Lubliniensis 2 (1962), p. 92-94.

[5] M. Biernacki, *Sur quelques majorantes de la théorie des fonctions univalentes*, Comptes Rendus Hebdomadaires de l'Académie des Sciences, Paris, 201 (1935), p. 256.

[6] — *Sur les majorantes des fonctions holomorphes dans le cercle* $|z| < 1$, Mathematica, Cluj, 12 (1936), p. 49-64.

[7] G. M. Golusin, *Geometrische Funktionentheorie*, Berlin 1957.

[8] Z. Lewandowski, *Sur les majorantes des fonctions holomorphes dans le cercle* $|z| < 1$, Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 15 (1961), p. 5-11.

[9] — *Star-like majorants and subordination*, ibidem, p. 79-84.

[10] Shah Tao-shing, *Goluzin's number* $(3-\sqrt{5})/2$ *is the radius of superiority in subordination*, Science Record 1 (1957), p. 258-261.

[11] Wu Žwao-Jen, *Some classes of functions of star-likeness*, Acta Mathematica Sinica 7.2 (1957), p. 179-182.

Reçu par la Rédaction le 15. 2. 1963