COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XI | 1963 | FASC. 1

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES RÉSOLUBLES PAR DES MÉTHODES ÉLÉMENTAIRES

PAR

K. TATARKIEWICZ (VARSOVIE)

„... Questions of formal integration do not at present attract the attention of scolars. One even hears disparaging remarks about 'mastery of quadrature' ... I can not help but feel that the source of this is the same as in the fable of the fox and the grapes..."

*B. M. Kojalovitch**

§ 1. Ce travail est consacré à la généralisation d'une méthode élémentaire connue de résolution des équations différentielles ne contenant pas explicitement la variable indépendante. Elle conduit à l'intégration d'un assez grand nombre d'équations différentielles ordinaires d'ordre supérieur par quadratures ou même par les fonctions élémentaires.

L'interprétation géométrique de la méthode sera donnée au § 7 et quelques généralisations possibles aux systèmes d'équations seront esquissées au § 8 (¹).

Il est vrai que les méthodes qui vont être considérées peuvent ne pas être efficaces si on les applique à n'importe quelle équation ne contenant pas explicitement la variable indépendante. Ici — comme d'ailleurs dans toute la théorie des solutions élémentaires — le succès d'une méthode est impossible à prévoir a priori. Cela tient probablement au fait que certaines fonctions ne sont appelées élémentaires que par des raisons historiques et que la classe de ces fonctions n'est fermée ni par rapport à l'intégration, ni par rapport à l'inversion de fonction.

* Б. М. Коялович, *О проблеме интегрирования дифференциального уравнения* $ydy - y\,dx = R(x)\,dx$, Сбовник посвященный памяти Д. А. Граве, Москва 1940, p. 79-87. [Cité d'après Mathematical Reviews 2 (1941), p. 197.]

(¹) Communication présentée à la Société Polonaise de Mathématique, Section de Lublin (séance du 6. X. 1960). Les calculs complets (d'ailleurs fort simples) et quelques autres exemples paraîtront dans Prace Matematyczne (en polonais).

§ 2. Considérons l'équation d'ordre n ne contenant pas explicitement la variable indépendante

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0. \tag{2.1}$$

Soit $y = y(x)$ une de ses solutions. Admettons qu'elle a une fonction inverse $x = y_{-1}(y)$. Une méthode connue de résolution de l'équation (2.1) est basée sur l'emploi de la substitution

$$p(y) = y'\big(y_{-1}(y)\big); \tag{2.2}$$

on obtient ainsi l'équation d'ordre $n-1$

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}, p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left[\frac{dp}{dy}\right]^2, \ldots\right) = 0. \tag{2.3}$$

En particulier, on peut résoudre ainsi par quadratures l'équation

$$y'y''' = y''^2 + y'^3 f(y). \tag{A}$$

§ 3. L'application de cette méthode exige l'existence de la fonction $x = y_{-1}(y)$, inverse de la solution $y = y(x)$. Cependant nous n'étudierons pas ici les conditions qu'il faudrait imposer à la fonction de $n+1$ variables $F = F(y, y_1, \ldots, y_n)$ pour assurer l'existence de la fonction inverse y_{-1}, car de telles conditions ne le font que localement; de plus, les équations de la forme (2.1) peuvent avoir des solutions singulières, tandis que l'importance des méthodes élémentaires consiste en ce qu'elles donnent ou doivent donner toutes les solutions, et cela non localement.

§ 4. On peut généraliser la méthode du § 2 en employant la substitution

$$q(y) = y^{(k)}\big(y_{-1}(y)\big) \tag{4.1}$$

où $y^{(k)} = d^k y/dx^k$ et $k \geqslant 1$. On a donc

$$\begin{aligned} y^{(k)}(x) &= q(y)|_{y=y(x)}, \\ y^{(k+1)}(x) &= q'(y)|_{y=y(x)} y'(x), \\ y^{(k+2)}(x) &= q''(y)|_{y=y(x)}[y'(x)]^2 + q'(y)|_{y=y(x)} y''(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

L'équation (2.1) devient par cette substitution

$$\begin{aligned} &G(y, y', \ldots, y^{(k-1)}, q, q', \ldots, q^{(n-k)}) \\ &\qquad \equiv F(y, y', \ldots, y^{(k-1)}, q, y'q, q''y'^2 + q'y'', \ldots) = 0. \end{aligned}$$

Si la fonction G est indépendante de $y', \ldots, y^{(k-1)}$, on parvient à l'équation d'ordre $n-k$

$$G^*\left(y, q, q\frac{dq}{dy}, \ldots, \frac{d^{n-k}q}{dy^{n-k}}\right) = 0.$$

Cette méthode permet, entre autres, de réduire l'équation d'ordre n

$$y^{(n)} = y'f(y, y^{(n-1)}) \tag{B}$$

à une équation d'ordre 1. Dans le cas particulier où

$$y''' = y'f(y), \tag{C}$$

on obtient même les solutions par quadratures. Il en est de même pour l'équation

$$y''' = a(y)y'y'' + b(y)y', \tag{D}$$

dont des cas particuliers sont les équations

$$yy''' + ay'y'' + f(y)y' = 0 \tag{E}$$

(résolue par Wieghard [7]; voir aussi Kamke [3], p. 630) et

$$yy''' - ay'y'' + y^3y' = 0 \tag{F}$$

(résolue pour $a = 1$ par Kamke [2], p. 602, et [3], p. 629).

Par la même méthode, l'équation d'ordre $k+2$

$$y'y^{(n+2)} = y^{(n+1)}y'' + y'^3 g\left(y, y^{(n)}, \frac{y^{(n+1)}}{y'}\right) \tag{G}$$

se laisse réduire à l'équation du second ordre

$$\frac{d^2q}{dy^2} = g\left(y, q, \frac{dq}{dy}\right) \tag{4.2}$$

(ou bien on a $y'(x) \equiv 0$). Si

$$g(y, z, u) \equiv a(y)z + b(y)u + f(y), \tag{H}$$

l'équation (4.2) est linéaire. En particulier, lorsque $n = 1$ ou 2 et

$$g(y, z, u) = f(y), \tag{I}$$

$$g(y, z, u) = \alpha z + \beta u + f(y) \tag{J}$$

respectivement (où α et β sont des constantes) ou bien si

$$g(y, z, u) \equiv b(y) + a(y)z, \tag{K}$$

on obtient les solutions par quadratures.

§ 5. La méthode admet des modifications et des variantes. Par exemple, l'équation

$$y^2y''+yy'^2 = a, \tag{L}$$

où a est une constante, peut être réduite par une substitution inverse à (2.2) et, à l'aide de la formule (2.3), à l'équation

$$\frac{d^3x}{d\xi^3} = a;$$

elle peut donc être résolue par quadratures et en particulier, lorsque $a = 0$, c'est-à-dire lorsqu'elle revient à

$$yy'' = -y'^2, \tag{M}$$

elle se laisse résoudre même à l'aide de fonctions élémentaires.

L'application de la substitution (2.2) à l'équation (L) conduit à l'équation du premier ordre dépendant explicitement de la variable indépendante

$$x^2yy' = a-x^2y^2. \tag{N}$$

Sa solution est banale pour $a = 0$. Pour $a \neq 0$, on revient par la substitution (2.2) à l'équation (L). On peut ainsi trouver les solutions élémentaires de (N).

Avant d'appliquer les substitutions (2.2) ou (4.1) à une équation d'exemple d'ordre n, on peut employer la substitution

$$z^{(k)}(x) = y(x).$$

Bien qu'elle conduise à une équation d'ordre $n+k$, celle-ci peut être plus facile à résoudre que l'équation primitive. Citons à titre d'exemple les équations suivantes:

$$y^{(n)} = yf(y^{(n-1)}) \tag{O}$$

(une étape intermédiaire en est l'équation (B)) et le cas plus particulier

$$y^{(n)} = \lambda yy^{(n-1)}, \tag{P}$$

qui comprend pour $n = 3$ l'équation de Blasius (voir [1]) et étudiée par plusieurs auteurs (voir par exemple Salié [5]). Malheuresement, ce n'est vraisemblablement que dans le cas banal de $n = 2$ que cette méthode conduit à des résolutions élémentaires.

Un cas particulier de l'équation (G) est l'étape intermédiaire de la résolution de l'équation

$$yy^{(n+2)} = y'y^{(n+1)}+y^3g\left(y^{(n)}, \frac{y^{(n+1)}}{y}\right). \tag{Q}$$

Dans le cas particulier où

$$g(v, u) = f(v), \tag{R}$$

on obtient en posant $z' = y$ et $q = z^{(n+1)}$ l'équation

$$\frac{d^2q}{dz^2} = f(q),$$

résoluble par quadratures. On n'a en effet qu'à résoudre l'équation

$$z^{(n+1)} = q(z) \tag{5.1}$$

et on obtient la solution cherchée à l'aide de la formule $y(x) = z'(x)$.

Le cas particulier de (R) où $f(v) \equiv 0$, c'est-à-dire l'équation

$$yy^{(n+2)} = y'y^{(n+1)}, \tag{S}$$

se résout par des fonctions élémentaires et lorsque $n = 1$, c'est-à-dire que

$$yy''' = y'y''+y^3f(y') \tag{T}$$

l'équation (5.1) se résout par quadratures.

Un autre cas particulier de l'équation (Q), à savoir l'équation

$$yy^{(n+2)} = y'y^{(n+1)}+by^3y^{(n)}+ay^2y^{(n+1)} \tag{U}$$

où a, b sont des constantes, conduit par les mêmes substitutions à l'équation

$$q''-aq'-bq = 0. \tag{5.2}$$

Pour $n = 1$, l'équation (U) devient

$$yy''' = y'y''+by^3y'+ay^2y'' \tag{V}$$

et alors tous les calculs nécessaires s'exécutent facilement.

De même l'équation

$$y^2y''' = 4y''y'y-3y'^2+y'g(y) \tag{W}$$

se résout par quadratures et son cas particulier

$$y^2y''' = 4y''y'y-3y'^2+2ay'y^4, \tag{X}$$

où a est une constante (qui peut d'ailleurs être nulle), se résout par les fonctions élémentaires. Les calculs sont particulièrement simples lorsque $a = 0$, c'est-à-dire dans le cas de l'équation

$$y^2y''' = 4y''y'y-3y'^3. \tag{Y}$$

§ 6. Le champ d'applications des substitutions plus générales que (4.1), à savoir des substitutions de la forme

$$r(y) = f(y, y', y'', \ldots)|_{x=y_{-1}(y)}$$

est très vaste. Citons-en à titre d'exemple l'équation

$$yy'y''' = y'^2y'' - yy''^2. \tag{Z}$$

La substitution

$$r(y) = y'(x)y''(x)|_{x=y_{-1}(y)},$$

dont on tire

$$r'(y(x))y'(x) = [y''(x)]^2 + y'(x)y''(x)$$

(où $r' = dr/dy$) donne

$$y' = 0,$$

ou bien

$$\frac{dr}{dy} = \frac{r}{y}.$$

L'équation (Z) se résout donc par quadratures.

§ 7. Quelle est l'interprétation géométrique des cas dans lesquels on peut appliquer la méthode envisagée? Considérons l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right); \tag{7.1}$$

elle équivaut au système d'équations

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = f(y, z), \tag{7.2}$$

auquel vient correspondre l'équation des caractéristiques

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{z}f(y, z). \tag{7.3}$$

C'est la même équation (aux notations près) qui s'obtient (cf. (2.1) et (2.3) pour $n = 2$) de (7.1) par la substitution (2.2). En considérant les solutions de (7.2) dans l'espace des points (x, y, z), les solutions de (7.1) en sont les projections sur le plan Oxy et les solutions de (7.3) le sont sur le plan Oyz. L'équation (7.3) est d'ordre 1 grâce au fait que la famille des solutions de (7.1) étant à deux paramètres, sa projection sur le plan Oyz n'est qu'une famille à un paramètre.

D'une façon analogue, l'équation (2.1) ou plus exactement l'équation explicite

$$y^{(n)} = f(y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

équivaut à un système de n équations d'ordre 1 avec les variables dépendantes $y, z_1, \ldots, z_{n-1}$. Les solutions en forment une famille à n paramètres. En la projetant sur un sous-espace formé par k axes, on obtient une famille à $k-1$ paramètres et on peut alors parvenir par la substitution (4.1) à une équation d'ordre $k-1$, par exemple toutes les fois que les sous-familles de la famille des solutions du système de n équations forment des cylindres de la forme $C \times R_{n-k}$ où C est une courbe.

En ce qui concerne les équations ne contenant pas explicitement la variable indépendante, une telle projection sur l'espace R_{n-1} à $n-1$ dimensions est notoirement possible toujours, grâce à quoi la méthode du § 2 conduisant à l'équation d'ordre $n-1$ est toujours applicable. Cette conclusion résulte d'ailleurs aussi des formules du § 2. Évidemment, déjà la méthode du § 4 n'est pas toujours applicable.

L'interprétation de la possibilité d'appliquer la méthode du § 6 est évidente.

§ 8. Une généralisation aux systèmes d'équations différentielles est presque immédiate. Considérons par exemple un système de $n+1$ équations (où $n \geqslant 1$) d'ordre 1 dont les seconds membres ne contiennent pas la variable indépendante t (systèmes dynamiques):

$$\frac{dx}{dt} = g(x, y_1, \ldots, y_n), \quad \frac{dy_i}{dt} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{8.1}$$

Soit $x = x(t)$, $y_1 = y_1(t), \ldots, y_n = y_n(t)$ une solution du système (8.1). Admettons l'existence de la fonction $t = x_{-1}(x)$, inverse de $x = x(t)$ et posons

$$p_i(x) = y_i(x_{-1}(x)), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Alors

$$x'(t)p_i'(x(t)) = y_i'(t).$$

On a ainsi la réduction bien connue du système (8.1) de $n+1$ équations du premier ordre au système

$$\frac{dp_i}{dx} = \frac{f_i(x, p_1, \ldots, p_n)}{g(x, p_1, \ldots, p_n)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

n'en contenant que n équations.

Considérons maintenant un système de $n+1$ équations du second ordre

$$(8.2)\quad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= d\left(x, y_1, \ldots, y_n, \frac{dx}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \ldots, \frac{dy_n}{dt}\right), \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= h_i\left(x, y_1, \ldots, y_n, \frac{dx}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \ldots, \frac{dy_n}{dt}\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Soit $x = x(t), y_1 = y_1(t), \ldots, y_n = y_n(t)$ une de ses solutions. Admettons comme auparavant l'existence de la fonction $t = x_{-1}(x)$ inverse de $x = x(t)$ et posons

$$q(x) = x'\big(x_{-1}(x)\big),$$
$$p_i(x) = y_i\big(x_{-1}(x)\big), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Il vient

$$x''\big(x_{-1}(x)\big) = q(x)q'(x),$$
$$y_i'\big(x_{-1}(x)\big) = q(x)p_i'(x),$$
$$y_i''\big(x_{-1}(x)\big) = q(x)p_i''(x) + q(x)q'(x)p_i(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Le système (8.2) d'équations d'ordre $2n+2$ se réduit ainsi au système d'équations d'ordre $2n+1$

$$\frac{dq}{dx} = \frac{1}{q}d\left(x, p_1, \ldots, p_n, q, q\frac{dp_1}{dx}, \ldots, q\frac{dp_n}{dx}\right),$$
$$\frac{d^2p_i}{dx^2} = -p_i\frac{dq}{dx} + h_i\left(x, p_1, \ldots, p_n, q, q\frac{dp_1}{dx}, \ldots, q\frac{dp_n}{dx}\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

On peut généraliser facilement cette méthode aux systèmes d'équations d'ordre supérieur aussi bien en employant les substitutions qui correspondent à celles de la variante du § 2, qu'en faisant usage des substitutions qui correspondent à celles du § 4 ou du § 6. Les calculs nécessaires sont faciles.

§ 9. Bien que le système de notation de Menger (voir par exemple son manuel [4]) ne me semble pas encore suffisamment développé (voir mon article [6]) pour l'introduire avec succès dans toutes les branches de l'Analyse, il se prête fort bien à être employé dans le présent travail. Le lecteur qui connaît ce système de notation et qui voudra bien y transcrire toutes les formules des paragraphes précédents pourra constater l'économie qu'il comporte et se rendre compte de certaines difficultés logiques qu'il permet d'éviter.

TRAVAUX CITÉS

[1] H. Blasius, *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung*, Zeitschrift für Mathematik und Physik 56 (1908), p. 1-37.

[2] E. Kamke, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*, Leipzig 1959.

[3] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Москва 1961.

[4] K. Menger, *Calculus, a modern approach*, Boston 1955.

[5] H. Salié, *Über die Koeffizienten der Blasiusschen Reihen*, Mathematische Nachrichten 14 (1955), p. 241-248.

[6] K. Tatarkiewicz, *Symbolika Mengera rachunku różniczkowego i całkowego*, Wiadomości Matematyczne 3 (1960), p. 267-282.

[7] K. Wieghard, *Ergänzungen zu: Kamke, Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 23 (1943), p. 125.

Reçu par la Rédaction le 8. 6. 1962;
en version modifiée le 10. 12. 1962