REFERENCES

[1] L. S. Bosanquet, *A mean value theorem*, Journal of the London Mathematical Society 16 (1941), p. 146-148.

[2] — *Note on convexity theorems*, ibidem 18 (1943), p. 239-248.

[3] A. L. Dixon and W. L. Ferrar, *On Cesàro sums*, ibidem 7 (1932), p. 87-93.

[4] R. D. Lord, *On some relations between the Abel, Borel and Cesàro methods of summation*, Proceedings of the London Mathematical Society (2) 38 (1935), p. 241-256.

[5] C. T. Rajagopal, *On a theorem connecting Borel and Cesàro summabilities*, Journal of the Indian Mathematical Society (N. S., Jubilee Issue) 24 (1960), p. 433-442.

[6] — and S. Minakshisundaram, *An extension of a Tauberian theorem of L. J. Mordell's*, Proceedings of the London Mathematical Society (2) 50 (1948), p. 242-255.

[7] T. Varadarajan, *On two extensions of the Hardy-Landau theorem*, Colloquium Mathematicum 8 (1961), p. 271-276.

UNIVERSITY OF MADRAS
RAMANUJAN INSTITUTE OF MATHEMATICS

Reçu par la Rédaction le 14. 1. 1963

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XI 1963 FASC. 1

À PROPOS D'UN THÉORÈME DE BÔCHER SUR LE WRONSKIEN

PAR

Z. MOSZNER (CRACOVIE)

Il y a longtemps que Bôcher a démontré (voir [1] et [2]) le théorème d'après lequel les fonctions complexes $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ d'une variable réelle étant de classe C^{n-1} en tout point d'un intervalle ouvert I et telles que l'on a pour le wronskien l'identité

$$W(f_1, \ldots, f_{n-1}) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_{n-1} \\ f_1' & f_2' & \ldots & f_{n-1}' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{(n-2)} & f_2^{(n-2)} & \ldots & f_{n-1}^{(n-2)} \end{vmatrix} \equiv 0 \quad \text{sur } I,$$

on a nécessairement aussi

$$W(f_1, \ldots, f_{n-1}, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_{n-1} & f_n \\ f_1' & f_2' & \ldots & f_{n-1}' & f_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \ldots & f_{n-1}^{(n-1)} & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \equiv 0 \quad \text{sur } I.$$

Cette communication a pour but de démontrer qu'on peut atténuer l'hypothèse de ce théorème, en admettant seulement que les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont différentiables jusqu'à l'ordre $n-1$. Et voici la démonstration:

Soit x_0 un point arbitraire de l'intervalle I. Considérons deux cas suivants:

1. Les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont linéairement dépendantes dans un entourage de x_0, c'est-à-dire qu'il existe un entourage E de x_0 et des nombres constants $c_1, \ldots, c_n$ tels que

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu f_\nu(x) \equiv 0 \ \text{sur } E \quad \text{et} \quad \sum_{\nu=1}^{n} (c_\nu)^2 > 0. \tag{1}$$

2. Les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ ne sont linéairement dépendantes dans aucun entourage de x_0.

Dans le cas 1, on a d'après (1) $W(f_1, \ldots, f_n) \equiv 0$ sur E, donc à plus forte raison

$$\{W(f_1, \ldots, f_n)\}_{x=x_0} = 0.$$

Dans le cas 2, la matrice

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_{n-1}' \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ f_1^{(n-2)} & f_2^{(n-2)} & \cdots & f_{n-1}^{(n-2)} \end{pmatrix} \tag{2}$$

est au point x_0 de rang $r \leqslant n-3$.

En effet, on a d'après l'hypothèse $r \leqslant n-2$. En supposant qu'il existe un mineur $\Delta(x)$ de la matrice (2) du degré $n-2$ pour lequel $\Delta(x_0) \neq 0$, il existerait par suite de la continuité de la fonction $\Delta(x)$ au point x_0 un entourage E de x_0 dans lequel on aurait $\Delta(x) \neq 0$. Le rang de la matrice (2) serait donc égal à $n-2$ en tout point de E. Il en résulte (voir [3], Corollaire 1, p. 189) la dépendance linéaire des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sur E, contrairement à l'hypothèse.

Ceci établi, la matrice

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_{n-1}' \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ f_1^{(n-2)} & f_2^{(n-2)} & \cdots & f_{n-1}^{(n-2)} \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

ne peut avoir au point x_0 que le rang au plus égal à $n-2$ et par conséquent celui de la matrice

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_{n-1}' & f_n' \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_{n-1}^{(n-1)} & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

au point x_0 ne peut dépasser $n-1$. On a donc

$$\{W(f_1, \ldots, f_n)\}_{x=x_0} = 0,$$

c. q. f. d.

TRAVAUX CITÉS

[1] M. Bôcher, *Certain cases in which the vanishing of the Wronskian is a sufficient condition for linear dependence*, Transactions of the American Mathematical Society 2 (1901), p. 139-149.

[2] G. H. Meisters, *Local linear dependence and the vanishing of the Wronskian*, American Mathematical Monthly 68 (1961), p. 847-856.

[3] Z. Moszner, *Sur le wronskien et la dépendance linéaire des fonctions*, Bulletin des Sciences Mathématiques, 2e série, 85 (1961), p. 165-190.

Reçu par la Rédaction le 24. 12. 1962