à la nouvelle variable d'intégration $y' = z'' - z' + y$ en tenant compte des estimations (12). La constante Ω figurant dans les conditions en question sera évidemment indépendante de l'indice k.

La sphère P^0, qui contient l'origine, étant choisie arbitrairement et ne différant par ailleurs en rien des sphères P^k où $k = 1, 2, \ldots$, le second sommande de (18) satisfait également aux conditions analogues à (14) et toutes les estimations établies sont vraies dans l'ensemble G_0 tout entier. Il est ainsi démontré que

$$\|F''_x\|_1 \leqslant \Omega \quad \text{et} \quad \|F''_{x'} - F''_x\|_1 \leqslant \Omega \|x' - x\|_1.$$

Ces conditions et celles de (14) entraînent d'après (10) et (11) les propriétés (8) et (9) de F_x, qu'il s'agissait de prouver.

TRAVAUX CITÉS

[1] L. Lichtenstein, *Über einen Einwand gegen das Newtonsche Attraktionsgesetz*, Mathematische Zeitschrift 27 (1928), p. 607-622.

[2] — *Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie, III*, Berichte der Mathematisch-Physikalischen Klasse der Sächsischen Akademie der Wissenschaften 78 (1926), p. 214-239.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE WROCŁAW

Reçu par la Rédaction le 8. 10. 1961

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. X 1963 FASC. 2

WITOLD WOLIBNER

(9. IX. 1902 – 9. I. 1961)

PAR

Z. CHARZYŃSKI (ŁÓDŹ), A. KRZYWICKI (WROCŁAW) ET J. ZAMORSKI † (WROCŁAW)

Né le 9 septembre 1902 au village Piotrowo près de Płock, Witold Wolibner passa en 1921 son baccalauréat au lycée de Płock et prit l'inscription à la Faculté de Philosophie (Section des Sciences mathématiques et naturelles) de l'Université de Varsovie. Après y avoir étudié les mathématiques, la physique, l'astronomie, la logique et la psychologie, il y obtint en 1930 le grade de docteur en philosophie pour sa thèse de doctorat intitulée „Contribution à la théorie des fonctions analytiques".

Depuis 1927, Witold Wolibner fut occupé à l'Institut d'Aérodynamique nouvellement fondé auprès de l'École Polytechnique de Varsovie. Il y travailla, avec un relâche de trois ans, jusqu'au début de la II$^{\text{me}}$ guerre mondiale. Depuis 1935, il occupa, en outre, le poste d'assistant de mathématiques à l'École Polytechnique de Varsovie et fut actif pour l'annuaire „Fortschritte der Mathematik" qui le comptait parmi ses critiques scientifiques permanents.

En 1939, lors de l'invasion allemande, il s'enrôla, malgré la faiblesse de sa santé, au II Bataillon des Volontaires pour la Défense de Varsovie et y combatta jusqu'à la chute de la capitale. En 1941, il trouva réfuge avec sa mère à la campagne où il vécut dans des conditions matérielles très pénibles, s'y vouant toutefois à l'enseignement scolaire secret. En novembre de 1944, aussitôt après la libération de la région du pays où il se trouvait, il devint maître des mathématiques au lycée de Staszów, qu'il ne quitta qu'en 1947 pour aller s'établir définitivement à Wrocław, l'université et l'école polytechnique de cette ville (fondues à cette époque en une unité commune) lui ayant offert la chaire de la Mécanique rationnelle à la Faculté des Mathématiques, Physique et Chimie. En qualité du professeur et du chef de cette chaire, il travailla jusqu'à sa mort qui l'emporta peu avant sa titularisation votée à l'unanimité par le Conseil de la Faculté.

Il associait ce travail, depuis 1953, au professorat à l'Institut Mathématique de l'Académie Polonaise des Sciences et, depuis 1956, aux fonctions du dirigeant le Groupe de la Mécanique rationnelle au même institut.

Il mourut le 9 janvier 1961 à Wrocław.

*

L'oeuvre scientifique du professeur Witold Wolibner appartient au domaine de l'analyse mathématique entendue dans un sens aussi vaste que général. Connaisseur fin et profond de l'analyse classique, il fut entre autres l'auteur des résultats originaux de topologie générale et de la théorie des déterminants, ce qui témoigne de l'étendue de ses intérêts mathématiques. Mais c'est surtout le domaine des fonctions analytiques et celui de l'hydromécanique qui lui ont été les plus familiers et qu'il a enrichi de ses travaux les plus intéressants. À la suite des longues années du travail à l'Institut d'Aérodynamique, il devint un excellent maître en art de calculer, n'hésitant pas à s'engager dans des calculs les plus compliquées et sachant y discerner l'essentiel.

Il débuta dans la recherche scientifique par sa thèse de doctorat consacrée au problème de caractériser les ensembles des valeurs des fonctions analytiques qu'elles prennent à leurs points singuliers [1] ([1]). Il y a démontré qu'une fonction continue sur le plan fermé et analytique hors un ensemble ponctiforme prend nécessairement dans cet ensemble toute valeur prise par elle ailleurs.

Plus tard, il s'occupa de la théorie des fonctions multivalentes et lui consacra quelques travaux intéressants. Les problèmes fondamentaux de cette théorie consistent notoirement à caractériser les fonctions univalentes dans le cercle-unité, ou à l'extérieur de ce cercle, par des systèmes d'inégalités pour les coefficients de leurs développements en séries de Taylor ou de Laurent. Il s'agissait soit d'une caractérisation complète, c'est-à-dire d'un système infini d'inégalités constituant conjointement une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction considérée soit univalente, soit d'une caractérisation partielle, à savoir d'un système d'inégalités, possiblement simples, ne constituant que des conditions nécessaires.

Le problème d'une caractérisation complète fut résolu par lui dans son travail [9]: il y montra que pour qu'une fonction holomorphe à l'extérieur du cercle-unité,

$$\varphi(\zeta) = \zeta + \frac{b_1}{\zeta} + \frac{b_2}{\zeta^2} + \ldots, \quad |\zeta| > 1, \tag{1}$$

([1]) Les numéros entre crochets sont ceux des „Publications mathématiques de Witold Wolibner", voir ce fascicule, p. 360.

soit univalente, il faut et il suffit que l'on ait, pour toute suite finie $x_0, x_2, \ldots, x_n$ de nombres complexes, l'inégalité

$$\sum_{k=-n}^{\infty} K|c_n|^2 \leqslant 0, \tag{2}$$

où c_k s'expriment arithmétiquement par $x_0, x_1, \ldots, x_n$ et par les coefficients $b_1, b_2, \ldots$ de (1). En vertu de l'identité

$$\sum_{j=-n}^{\infty} \frac{c_j}{\xi_j} = x_0 + x_1\varphi(\zeta) + \ldots + x_n\big(\varphi(\zeta)\big)^n,$$

les sommandes du membre gauche de l'inégalité (2) sont certaines formes d'Hermite de paramètres arbitraires $x_0, x_1, \ldots, x_n$. En y appliquant des conditions connues pour que ces formes soient de signe constant, on parvient à en tirer des systèmes d'inégalités équivalents à l'inégalité (2), mais qui ne contiennent déjà que les coefficients de (1). Ce beau résultat, dû à Wolibner, appartient dès lors aux théorèmes classiques de la théorie des fonctions analytiques. Les conditions du même genre que (2) ont été trouvés indépendamment aussi par Biernacki ([2]) et Goluzin ([3]), mais seulement comme nécessaires, ce qui est relativement bien plus facile. Wolibner a établi cependant un fait essentiel et difficile, à savoir qu'elles sont en même temps suffisantes. Des conditions à la fois nécessaires et suffisantes, proches de (2), ont été établies également par Grunsky ([4]) en 1939, mais par une méthode longue et pénible, tandis que la démonstration de Wolibner était de beaucoup plus simple.

Le problème d'une caractérisation partielle fut traité par Wolibner dans son travail [5]. Il y énonça l'hypothèse que les inégalités

$$|b_n| \leqslant 2/(n+1) \quad \text{où} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

constituent une condition nécessaire pour l'univalence de la fonction $\varphi(\zeta)$ de la forme (1) et il démontra cette hypothèse sous certaines conditions supplémentaires. Il y montra également que cette hypothèse est plus générale que la fameuse hypothèse de Bieberbach dont la question demeure ouverte jusqu'à présent et d'après laquelle on aurait

$$|A_n| \leqslant n \quad \text{où} \quad n = 2, 3, \ldots \tag{5}$$

([2]) M. Biernacki, *Sur les fonctions en moyenne multivalentes*, Bulletin de la Société Mathématique de France 70 (1946), p. 5.

([3]) G. M. Goluzin, *Über p-valente Funktionen*, Matematitcheskiĭ Sbornik 8 (1940), p. 277-284.

([4]) H. Grunsky, *Koeffizientenbedingungen für schlicht abbildende meromorphe Funktionen*, Mathematische Zeitschrift 45 (1939), p. 29-61.

pour toute fonction univalente dans le cercle unité

$$F(z) = z + A_2 z^2 + \dots$$

L'hypothèse (4) ne s'est pas avérée en toute généralité, c'est-à-dire pour toutes les fonctions univalentes de la forme (1), comme l'ont montré Garabedian et Schiffer ([5]), mais sa validité embrasse plusieurs classes fort importantes de telles fonctions, celle par exemple de toutes les fonctions étoilées.

Quant aux autres travaux de Wolibner concernant les fonctions analytiques, il généralisa dans son travail [8] les connus résultats de Faber sur les rapports entre leurs singularités. Il y envisagea les couples de fonctions analytiques $f(z)$, $\varphi(z)$ engendrées dans l'entourage du point 0 par les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

respectivement, où

$$a_n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_j}{j!} n^j \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, \dots,$$

et établit des relations entre les régions de l'existence de branches univoques des fonctions en question et la situation de leurs points singuliers. Ce furent les calculs liés à ces solutions qui ont dirigé son attention sur la théorie des déterminants, à laquelle il consacra son travail [13], le dernier paru de sa vie.

Les débuts de ses travaux en hydromécanique, et qui se rattachaient à ses occupations professionnelles à l'Institut d'Aérodynamique, ont eu pour sujet principal les problèmes du vol des avions et ceux de leur construction. Parmi ces travaux de Wolibner, un seul a été publiée, à savoir [4] (en polonais). Il traite de la méthode pour calculer les données concernant le gouvernail horizontal et l'emplacement du centre de gravité par rapport à l'aile de façon à assurer la stabilité longitudinale de l'avion. Mais cet ouvrage, comme d'ailleurs ses autres ouvrages de ce genre, étaient loin de satisfaire leur auteur; c'est pourquoi Wolibner élargit considérablement ses recherches dès le début en s'attaquant déjà en 1933 à des problèmes les plus fondamentaux. Il établit dans son travail [3] l'existence, pour un temps infiniment long, de la solution des équations du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène et incompressible, remplissant une région fixe quelconque, la distribution initiale du tourbillon étant

([5]) P. R. Garabedian and M. Schiffer, *A coefficient inequality for schlicht functions*, Annals of Mathematics 61 (1955), p. 116-136.

arbitraire. C'était là le premier résultat non local dans le cas des équations non linéaires aussi compliquées que celles d'hydromécanique. On leur avait consacré de nombreux travaux, à en citer avant tout ceux de L. Lichtenstein, mais on n'est pas allé par delà les démonstrations de l'existence locale des solutions. Le résultat non local de Wolibner est à considérer comme un succès remarquable, surtout à défaut d'outils tels que les méthodes topologiques de Leray et Schauder, inventées un an plus tard.

Le travail [3] de Wolibner mérite l'attention aussi d'un autre point de vue: ce qu'en le comparant aux travaux des autres auteurs d'alors qui traitaient des sujets analogues, on est frappé par l'homogénéité des déductions dont il est saturé. Les lemmes consécutifs n'y concernent que les propriétés de la distribution des tourbillons, des vitesses et des déplacements des particules du fluide. Ce style de recherche et ce mode de penser lui ont été imposés par son intuition du mécanicien et sa passion particulière pour l'hydrodynamique.

En 1951 parut sa publication [6] contenant la solution du problème qui absorbait depuis longtemps son esprit. Il s'y agissait du mouvement plan du liquide visqueux, incompressible, entourant sur le plan infini un contour fermé. Le résultat est l'impossibilité d'un mouvement stable lorsque l'énergie du liquide en mouvement est finie. Non seulement que ce résultat constitue une caractérisation mécanique intéressante des mouvements stables, mais encore il montre que c'est l'instabilité du mouvement qui est la source des forces agissant sur un corps qui se meut avec une énergie cinétique finie du liquide. Ce travail de Wolibner apporte une généralisation considérable des résultats des autres auteurs, et encore sous des hypothèses si simples et naturelles (énergie cinétique finie au lieu de la vitesse s'évanouissant uniformément à l'infini).

À côté des problèmes classiques de l'hydromécanique, Wolibner s'intéressait à ceux de la mécanique des autres milieux. Il consacra par exemple une communication [11], aussi succinte qu'importante, au mouvement des corps friables. Le problème en était de savoir quelle forme a le tenseur des pressions lorsqu'on suppose que les forces superficielles se présentant dans un milieu friable se comportent à la manière des réactions des corps solides. L'analyse de ce problème conduisit Wolibner à la conclusion que seul le frottement des corpuscules à l'état de repos relatif peut être la source des forces en question. C'est là une justification rigoreuse de la condition dite de Coulomb et que l'on admet, comme l'une des conditions possibles, quand on envisage les tensions dans des milieux friables. La communication apporte également une description et une classification de tous les mouvements possibles de tels milieux.

Plus récemment, Wolibner cherchait à expliquer également certains phénomènes liés au mouvement des glaciers. Il s'intéressait tout particulièrement à la question, jusqu'à quel point le mouvement d'un glacier se laisserait traiter comme celui d'un liquide visqueux.

Mentionnons enfin ses travaux se rapportant à d'autres domaines des mathématiques. Dans l'une de ses premières publications (voir [2]), Wolibner établit diverses propriétés du sous-ensemble composé de tous les points inaccessibles d'un ensemble fermé et construisit un ensemble fermé plan dont toute composante, pourvu qu'elle ne se réduise à un point, est formée exclusivement de points inaccessibles de cet ensemble fermé (c'est-à-dire de ses points p tels que tout continu qui unit p à un point quelconque n'appartenant pas à l'ensemble E en question passe nécessairement aussi par des points de E distincts de p). La construction de cet exemple se laisse généraliser à un nombre quelconque de dimensions. Le travail [7] contient la construction d'un polynôme dont le diagramme passe par n points arbitrairement donnés d'avance et ayant les ordonnées différentes, la valeur de ce polynôme augmentant et diminuant simultanément à celle de la fonction formée en unissant les n points consécutifs donnés par des segments rectilignes. Le travail [10] a pour sujet les conséquences du théorème de Titchmarsh sur la convolution qui concernent certaines relations entre les coefficients de Fourier de deux fonctions. Enfin, le travail [12] apporte la construction d'une assez vaste classe de fonctions définies dans l'espace à 3 dimensions et dont les intégrales étendues aux surfaces sphériques de rayon arbitraire ou dans leurs intérieurs s'annulent, pourvu que l'origine des coordonnées se trouve à la surface ou à l'intérieur de ces sphères. Une construction analogue se laisse réaliser sur le plan pour les fonctions de 2 variables réelles.

*

La mort du professeur Witold Wolibner l'emporta au cours du travail intense à la réconstruction complète d'un résultat de L. Lichtenstein relevant de l'hydromécanique (voir [14]). Le fragment de ce résultat était tombé entre ses mains peu avant la guerre et il fut perdu pendant les hostilités avec tous ses carnets des notes et ses manuscrits. Wolibner revenait sur ce sujet à plusieurs reprises. Finalement, en 1960, l'issue du volume 72 de „Mathematische Zeitschrift", consacré à la mémoire de L. Lichtenstein, le décida à s'acquitter définitivement de ce qu'il croyait être son devoir envers celui qui avait tant mérité du développement de la hydromécanique. Malheureusement, le troisième accès fort grave de l'angine de poitrine, d'ailleurs attendu par lui avec sérénité et sans peur, interrompit son travail presque terminé. C'est que le professeur Wolibner ne se préoccupait pas trop des conseils des médecins qui lui défendaient tout surmenage. Il souriait avec bonhomie à leurs conseils toutes les fois qu'il se trouvait en face des problèmes qui l'intéressaient ou des devoirs qu'il s'agissait d'accomplir. Il les accomplissait, en effet, toujours avec un extrême soin et une exactitude irreprochable.

Le bagage scientifique de Witold Wolibner ne peut être mesuré par le nombre de ces publications. Maints résultats dus à lui sont restés inédits, l'autocriticisme démesuré de leur auteur les ayant condamné à l'oubli. Son attitude envers ses résultats, faciles à son avis, et l'habitude de les passer sous silence lui ont valu l'opinion d'un mathématicien ne s'occupant que des problèmes difficiles. Cependant il travaillait sur eux sans bruit qu'il détestait et cherchait à éviter.

Ses cours, quand il pouvait encore les faire, étaient toujours d'une rare originalité, médités à fond et scrupuleusement préparés. Ils passaient pour difficiles et exigeaient un effort actif des auditeurs.

Contraint à ne pas sortir et souvent même à garder le lit pendant de longues semaines, Witold Wolibner continuait, malgré tout, son activité didactique et plusieurs travaux de licence prenaient chaque année naissance sous sa direction magistrale. Les séminaires pour ses disciples avaient lieu dans sa chambre privée. Plein du criticisme envers lui-même, il était particulièrement indulgent envers ses élèves. Il apprenait avec joie leurs résultats, les aidait à développer leurs propres idées, en améliorait les unes et en suggérait d'autres. Il serait juste de faire signer également de son nom un bon nombre de travaux de ses élèves.

De caractère très droit, simple et serein, opposé à des compromis, réagissant à tout mal et privé de toute trâce de pose ou de présomption, il était un patriote ardent et un connaisseur excellent de l'histoire de son pays. La perte d'un tel homme de science et homme tout court est particulièrement douloureuse pour les mathématiciens polonais.

PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE WITOLD WOLIBNER

[1] *Sur les ensembles des valeurs des fonctions analytiques, partout determinées, aux singularités ponctiformes, qu'elle admettent sur leurs ensembles singuliers*, Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie 25 (1932), p. 56-62.

[2] *Sur les points accessibles dans les ensembles fermés*, Mathematica 6 (1932), p. 124-131.

[3] *Un théorème sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long*, Mathematische Zeitschrift 37 (1933), p. 698-726.

[4] *O stateczności podłużnej samolotu* [*Sur la stabilité en longueur d'un aéroplane*], Sprawozdanie z Prac Instytutu Technicznego Lotnictwa, Warszawa 1936.

[5] *Sur les coefficients des fonctions analytiques univalentes à l'extérieur d'un cercle*, Studia Mathematica 11 (1949), p. 126-132.

[6] *Sur le mouvement plan du liquide visqueux, incompressible, entourant une courbe simple fermée*, Studia Mathematica 12 (1951), p. 279-285.

[7] *Sur un polynôme d'interpolation*, Colloquium Mathematicum 2 (1951), p. 136-137.

[8] *Sur une relation entre les singularités des fonctions analytiques*, Colloquium Mathematicum 2 (1951), p. 182-185.

[9] *Sur certaines conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction analytique soit univalente*, Colloquium Mathematicum 2 (1951), p. 249-253.

[10] *Sur certains corollaires du théorème de Titchmarsh*, Studia Mathematica 14 (1953), p. 107-110.

[11] *Sur le mouvement des corps friables*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Cl. III, 4 (1956), p. 507-509.

[12] *Sur les fonctions dont les intégrales étendues aux surfaces sphériques sont nulles*, Colloquium Mathematicum 5 (1957), p. 66-68.

[13] *O pewnym wyznaczniku typu przekątniowego* [*Sur un déterminant du type diagonal*], Prace Matematyczne 4 (1960), p. 9-10.

[14] (publication posthume rédigée par A. Krzywicki) *Sur un problème de Lichtenstein dans la dynamique des milieux dépourvus de cohésion*, Colloquium Mathematicum 10 (1963), p. 345-352.

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. X 1963 FASC. 2

JAN ZAMORSKI

(27. XII. 1927 — 28. XII. 1961)

PAR

Z. CHARZYŃSKI (ŁÓDŹ) ET A. ZIĘBA (WROCŁAW)

Né le 27 décembre 1927 à Varsovie, Jan Zamorski acheva ses études secondaires au lycée clandestin de la ville de Żywiec sous l'occupation allemande de 1939-1944. En 1946 il s'inscrivit à l'Ecole Polytechnique de Varsovie qu'il quitta en 1948 pour la Faculté des Mathématiques, Physique et Chimie de l'Université et École Polytechnique de Wrocław (alors institution commune).

Devenu assistant des mathématiques à cette Faculté en 1950, il y fut nommé adjoint en 1956, tout en travaillant simultanément à l'Institut Mathématique de l'Académie Polonaise des Sciences. En 1961 il obtint le grade de docteur des sciences mathématiques et physiques à l'Université de Wrocław, ayant soutenu sa thèse [4] (1) sur quelques propriétés extrémales des fonctions étoilées Il mourut subitement — et apparemment en pleine santé — le 28 décembre 1961 à Wrocław; presque à la veille de son agrégation.

La plupart des 13 travaux du docteur Jan Zamorski se rapporte aux estimations des coefficients des fonctions analytiques univalentes et aux problèmes qui s'y rattachent. Ce furent bien les questions qui intéressaient vivement le professeur Witold Wolibner dont le docteur Jan Zamorski était l'un des élèves.

Soit

$$s(\zeta) = \gamma\zeta + \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{\zeta} + \ldots \quad \text{où} \quad |\zeta| > 1 \tag{1}$$

une fonction arbitraire étoilée, c'est-à-dire transformant d'une façon conforme l'extérieur du cercle-unité en une région étoilée au point ∞, donc contenant, avec chacun de ses points, le rayon qui l'unit au point ∞. Posons

$$\gamma_k/\gamma = x_k + iy_k \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, \ldots$$

(1) Les numéros entre crochets sont ceux des „Publications mathématiques de Jan Zamorski", ce fascicule, p. 364.