COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. X 1963 FASC. 2

SUR L'INJECTION NATURELLE DE L'ESPACE (l) DANS L'ESPACE (l_p)

PAR

A. PEŁCZYŃSKI ET W. SZLENK (VARSOVIE)

S. Mazur a posé le problème suivant:

Soit (a_{ij}) $(i, j = 1, 2, 3, \ldots)$ une matrice, où a_{ij} sont des nombres réels, satisfaisant à la condition

$$\text{(M)} \qquad \sum_{i=j}^{\infty} \Big| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_j \Big| < \infty$$

pour toute suite (ξ_j) bornée. Est-ce que $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ii}| < \infty$?

La réponse à cette question est affirmative. On peut montrer davantage, à savoir que la condition (M) entraîne la convergence de la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^p \Big)^{1/p} \qquad \text{pour} \qquad p \geqslant 2;$$

autrement dit, l'injection naturelle de l'espace (l) dans l'espace (l_p) (voir la définition 1) est pour $p \geqslant 2$ une opération de Grothendieck (voir la définition 2). Nous en déduirons aussi quelques conséquences et généralisations. Nous l'appliquerons, entre autres, à un problème de Sudakov (voir [7], p. 188):

1. Définition 1. L'application I de l'espace (l) dans l'espace (l_p), où $p \geqslant 1$, par l'identité sera appelée *injection naturelle*.

Définition 2. Soient X et Y des espaces normables. L'opération linéaire $U: X \to Y$ est dite *opération de Grothendieck* [1] si, pour tout système $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de vecteurs appartenant à X, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \|Ux_i\| \leqslant C \cdot \sup_{|\eta_i| \leqslant 1} \Big\| \sum_{i=1}^{n} \eta_i x_i \Big\|,$$

où C est une constante dépendant de U.

---

[1] Les opérations de Grothendieck sont des opérations conjuguées avec les opérations semi-intégrales au sens de Grothendieck ([4], p. 160, définition 8).

Remarquons que si X et Y sont des espaces de Banach, alors pour que $U\colon X\to Y$ soit une opération de Grothendieck, il faut et il suffit que pour toute série commutativement convergente $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ $(x_i\in X)$ la série $\sum_{i=1}^{\infty} Ux_i$ soit absolument convergente (c'est-à-dire que l'on ait $\sum_{i=1}^{\infty}\|Ux_i\|<\infty$).

LEMME 1. *Une matrice numérique $(a_{ij})(i,j=1,2,3,\ldots)$ étant donnée, les propositions suivantes sont équivalentes:*

1° *La matrice (a_{ij}) satisfait à la condition* (M).

2° *Les suites: $x_i=(a_{ij})$, $j=1,2,3,\ldots$, appartiennent à l'espace (l) et la série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ est commutativement convergente.*

3° *La matrice transposée de (a_{ij}) satisfait à la condition* (M).

4° *Si $x=(\xi_j)$ et $y=(\eta_i)$ sont des suites bornées quelconques, la fonctionnelle définie dans l'espace $(m)\times(m)$*

$$A(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j$$

est bilinéaire.

Démonstration. 1° → 2°. Soient $x_i=(a_{ij})$ $(i,j=1,2,\ldots)$. Il résulte de la condition (M) que $\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|<+\infty$ pour tout $i=1,2,\ldots$, donc que $x_i\in(l)$. Posons $(\xi_j)=f\in(m)$. Alors la condition (M) peut être exprimée sous la forme $\sum_{i=1}^{\infty}|f(x_i)|<\infty$ pour toute fonctionnelle linéaire f définie dans (l), ce qui veut dire que la série $\sum_{i=1}^{\infty}x_i$ est faiblement commutativement convergente. En vertu de l'équivalence de la convergence faible à la convergence suivant la norme dans l'espace (l) (voir [1], p. 137), la série $\sum_{i=1}^{\infty}x_i$ est commutativement convergente.

2° → 3°. Soit $\sum_{i=1}^{\infty}x_i$ où $x_i=(a_{ij})$ une série commutativement convergente. Alors, pour toute suite bornée $x=(\eta_i)$, la série $\sum_{i=1}^{\infty}x_i\eta_i$ est convergente (voir [2], chapitre IV, (E)) vers un élément de l'espace (l), d'où

$$\sum_{j=1}^{\infty}\Big|\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}\eta_i\Big|<\infty.$$

3° → 4°. Soit

$$A_n(x,y)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}\eta_i=\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j$$

où $x=(\xi_j)\in(m)$ et $y=(\eta_i)\in(m)$. Les $A_n(x,y)$ sont donc des fonctionnelles bilinéaires définies dans le produit cartésien de l'espace (m) par lui-même $(m)\times(m)$. On a par hypothèse

$$\sum_{j=1}^{\infty}\Big|\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}\eta_i\Big|<\infty$$

et par conséquent la suite $A_n(x,y)$ converge pour tout $x\in(m)$ et tout $y\in(m)$. Donc, la fonctionnelle

$$(1)\qquad A(x,y)=\lim_n\sum_{j=1}^{n}\xi_j\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}\eta_i=\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}\eta_i=\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j$$

définie dans $(m)\times(m)$ est bilinéaire.

4° → 1°. La fonctionnelle $A(x,y)$ définie par (1) étant bilinéaire, il existe un nombre positif K tel que

$$|A(x,y)|\leqslant K\cdot\|x\|\cdot\|y\|\qquad\text{pour tout}\qquad x,y\in(m).$$

En posant

$$y=(\xi_j)\qquad\text{et}\qquad x=\Big(\eta_i\,|\,\eta_i=\operatorname{sign}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j\Big),$$

on a par conséquent

$$K\sup_j|\xi_j|\sup_i|\eta_i|=\Big|\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j\Big|\leqslant K\sup_j|\xi_j|=\sum_{i=1}^{\infty}\Big|\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j\Big|;$$

la matrice (a_{ij}) satisfait donc à la condition (M).

Remarque 1. Dans la condition 4°, il suffit d'admettre que $A(x,y)$ est une forme bilinéaire définie dans $(c_0)\times(c_0)$.

THÉORÈME 1. *Pour que l'injection naturelle $I\colon(l)\to(l_p)$ soit une opération de Grothendieck, il faut et il suffit que $p\geqslant 2$.*

Le théorème a été partiellement démontré par S. Mazur, qui a établi la suffisance de la condition $p=2$. En profitant de son autorisation, nous réproduisons ici son raisonnement qui n'a pas été publié.

Lorsque $x_i=(a_{ij})\in(l)$ et lorsque la série $\sum_{i=1}^{\infty}x_i$ converge commutativement, la matrice (a_{ij}) satisfait à la condition (M) en vertu du lemme 1. Désignons par $r_j(t)$ les fonctions du système de Rademacher, définies dans l'intervalle $\langle 0,1\rangle$:

$$r_j(t)=\operatorname{sign}\sin 2^{j-1}\pi t,\qquad j=1,2,\ldots$$

On a alors en vertu du lemme 1

$$K \geqslant \sum_{i=1}^{\infty}\Big|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} r_j(t)\Big| \quad \text{pour tout} \quad t \in \langle 0,1\rangle.$$

En intégrant cette inégalité dans l'intervalle $\langle 0,1\rangle$ et en appliquant l'inégalité de Khintchine (voir [5], p. 132), il vient

$$K \geqslant \int_0^1 \sum_{i=1}^{\infty}\Big|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} r_j(t)\Big|\,dt = \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^1\Big|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} r_j(t)\Big|\,dt \geqslant \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{8}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2\Big)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{\infty}\|Ix_i\|_{l_2},$$

ce qui montre que l'injection naturelle de l'espace (l) dans (l_2) est une opération de Grothendieck.

Pour $p>2$, nous avons l'inégalité

$$\Big(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2\Big)^{1/2} \geqslant \Big(\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^p\Big)^{1/p} \quad \text{pour tout} \quad (b_i)\in(l_2),$$

ce qui achève la démonstration que la condition est suffisante.

Pour en établir la nécessité, nous allons montrer que $1 \leqslant p < 2$ entraîne l'existence d'une matrice (a_{ij}) $(i,j=1,2,\ldots)$ satisfaisant à la condition (M) et telle que

$$\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^p\Big)^{1/p} = \infty.$$

C'est évident pour $p=1$, car il existe dans l'espace (l) des séries commutativement convergentes qui ne sont pas absolument convergentes. Soit donc $1<p<2$. En vertu du théorème de Dvoretzky et Rogers (voir [3]), il existe dans (l_p) une suite $x_i=(a_{ij})$ $(i,j=1,2,\ldots)$ telle que la série x_i est commutativement convergente et

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^p = \infty. \tag{2}$$

Soient $(\xi_j)\in(l_q)$ (où $1/q+1/p=1$) et $f_\eta=(\eta_j\xi_j)$, où (η_j) est une suite bornée quelconque. On a donc

$$\sum_{i=1}^{\infty}|f_\eta(x_i)| = \sum_{i=1}^{\infty}\Big|\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j\xi_j a_{ij}\Big| < \infty,$$

ce qui montre que la matrice $(\xi_j a_{ij})$ satisfait à la condition (M). En vertu du lemme 1, la matrice transposée $(c_{ji})=(\xi_j a_{ij})$ satisfait aussi à la condition (M).

Supposons maintenant que notre thèse soit fausse, c'est-à-dire que l'on ait pour toute matrice (b_{ij}) satisfaisant à la condition (M)

$$\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|b_{ij}|^p\Big)^{1/p} < \infty.$$

En posant $b_{ij}=c_{ji}$, on a

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|^p\Big)^{1/p} < \infty \quad \text{pour tout} \quad (\xi_j)\in(l_q);$$

en vertu du théorème de Landau

$$\infty > \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|^p = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^p = \sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|_{l_p}^p,$$

ce qui est incompatible avec la condition (2).

COROLLAIRE 1. *Si la matrice* (a_{ij}) $(i,j=1,2,\ldots)$ *satisfait à la condition* (M), *la série* $\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ii}|$ *est convergente.*

En effet, l'inégalité

$$\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2\Big)^{1/2} \geqslant \sup_j |a_{ij}|$$

entraîne d'après le théorème 1

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sup_j |a_{ij}| < \infty.$$

COROLLAIRE 2. *Soient X un espace de Banach, $\{x_i\}$ une suite d'éléments de cet espace telle que la série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ est faiblement commutativement convergente, enfin $\{f_i\}$ une suite de fonctionnelles linéaires définies dans X et telles que la série $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ est aussi faiblement commutativement convergente. Alors*

$$\sum_{i=1}^{\infty}|f_i(x_i)| < \infty \text{ (2)}. \tag{3}$$

En effet, la matrice (a_{ij}) $(i,j=1,2,\ldots)$, où $a_{ij}=f_i(x_j)$, satisfait évidemment à la condition (M), ce qui entraîne la convergence de la série (3) en vertu du corollaire 1.

(2) Comme nous l'a communiqué A. Alexiewicz, le même résultat a été obtenu par S. Kakutani. Dans sa démonstration, il a utilisé les propriétés du système de Walsh.

Remarque 2. La suffisance de la condition $p \geqslant 2$ dans le théorème 1 peut être aussi déduite d'un théorème d'Orlicz (voir [6], Satz 2) et du lemme 1. En effet, d'après le théorème d'Orlicz, lorsque $x_i(t) \in L_p \langle 0,1\rangle$, $p \geqslant 1$ et lorsque la série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t)$ est commutativement convergente, on a

$$\int_0^1 \Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2(t)\Big)^{p/2} dt < \infty.$$

En posant $p = 1$, il suffit de considérer l'espace (l) comme un sous-espace de $L_p \langle 0,1\rangle$ engendré par une suite de fonctions $\frac{1}{|A_n|}\chi_n(t)$ où $\chi_n(t)$ sont les fonctions caractéristiques des sous-intervalles disjoints A_n de l'intervalle $\langle 0,1\rangle$ ($|A_n|$ désigne la mesure de l'intervalle A_n).

Soit donnée une matrice (a_{ij}) satisfaisant à la condition (M). Alors la matrice (b_{ji}) où $b_{ji} = a_{ij}$ satisfait également à cette condition. Considérons la suite $(x_j(t))$ où

$$x_j(t) = \sum^{\infty} b_{ji} \frac{1}{|A_i|} \chi_i(t).$$

Il est évident que la série $\sum_{j=1}^{\infty} x_j(t)$ est commutativement convergente. On a en vertu du théorème d'Orlicz

$$\infty > \int_0^1 \Big[\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} b_{ji}\frac{1}{|A_i|}\chi_i(t)\Big)^2\Big]^{1/2} dt = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k}\Big[\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} b_{ji}\frac{1}{|A_i|}\chi_i(t)\Big)^2\Big]^{1/2} dt$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k}\Big[\sum_{j=1}^{\infty} b_{jk}^2\frac{1}{|A_k|^2}\Big]^{1/2} dt = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|A_k|}\int_{A_k}\Big[\sum_{j=1}^{\infty} b_{jk}^2\Big]^{1/2} dt = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} b_{jk}^2\Big)^{1/2}.$$

En remplaçant l'indice k par i et le terme b_{ji} par a_{ij}, on obtient

$$\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2\Big)^{1/2} < \infty. \tag{4}$$

Posons $x_i = (a_{ij})$. En vertu du lemme 1, la série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ est commutativement convergente. D'après (4), nous constatons que $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|_{l_2} < \infty$, c'est-à-dire que l'injection naturelle I est une opération de Grothendieck pour $p = 2$. Elle l'est donc également pour $p > 2$, c. q. f. d.

2. Nous allons à présent appliquer le théorème 1 à un problème posé par Sudakov (voir [7]).

Définition 3. Soit H un espace de Hilbert. Soit $\{f_i\}$ un système orthogonal quelconque. L'ensemble E de tous les éléments de l'espace H qui s'écrivent comme suit:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} t_i f_i \quad \text{où} \quad \sum_{i=1}^{\infty} t_i^2 \leqslant 1$$

est appelé un *ellipsoïde*.

L'ensemble E est dit un *ellipsoïde de Schmidt* lorsque

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|^2 < \infty.$$

LEMME 2. *Si $U\colon H_1 \to H_2$, où H_1 et H_2 sont des espaces de Hilbert, est une opération de Grothendieck et $\{e_i\}$ est un système orthonormal dans H_1, on a*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|Ue_i\|^2 < \infty.$$

Soit en effet $(t_i) \in (l_2)$. La série $\sum_{i=1}^{\infty} t_i e_i$ est donc commutativement convergente. D'après la définition de l'opération de Grothendieck, on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} |t_i| \cdot \|Ue_i\| < \infty$$

et (t_i) étant un élément de (l_2) quelconque, on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|Ue_i\|^2 < \infty.$$

THÉORÈME 2. *Soit*

$$S = \Big\{x = (a_i) \in (l_2) : \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \leqslant 1\Big\}.$$

Alors tout ellipsoïde E inscrit dans S est un ellipsoïde de Schmidt.

Démonstration. Désignons par $f_i = (a_{ij})$ les vecteurs qui engendrent l'ellipsoïde E et considérons l'application $\Phi\colon (l_2) \to (l)$ définie par la formule

$$\Phi\big((t_i)\big) = \sum_{i=1}^{\infty} t_i f_i = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} t_i a_{ij}\Big).$$

Comme $E \subset S$, on a

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Big| \sum_{i=1}^{\infty} t_i a_{ij} \Big| < \infty.$$

Soit $U = I \cdot \Phi$ où I est l'injection naturelle de (l) dans (l_2). En vertu du théorème 1, I est une opération de Grothendieck. Φ est évidemment une opération linéaire; donc U est également une opération de Grothendieck. On a en vertu du lemme 2

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|Ue_i\|^2 < \infty$$

où

$$e_i = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, 0, \ldots).$$

Mais $U(e_i) = f_i$, donc $\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|^2 < \infty$, c. q. f. d.

Remarque 3. Le théorème 2 peut être déduit sans appliquer le théorème 1. En effet, E_m étant un ellipsoïde ayant les axes $f_1, f_2, \ldots, f_m$, il est évident que $E_m \subset E \subset S$.

Soit $f_i = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k$ où $e_k = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k}, 1, 0, \ldots)$. Étant donné un système quelconque (t_i) $(i = 1, 2, \ldots, m)$ tel que $\sum_{i=1}^{\infty} t_i^2 \leqslant 1$, l'élément $x = \sum_{i=1}^{m} t_i f_i$ appartient à S. Par conséquent,

$$1 \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \Big| \sum_{i=1}^{m} t_i (f_i, e_k) \Big| \geqslant \sum_{k=1}^{N} |r_k(t)| \cdot \Big| \sum_{i=1}^{m} t_i (f_i, e_k) \Big|$$
$$\geqslant \Big| \sum_{i=1}^{m} t_i \sum_{k=1}^{N} r_k(t) \cdot (f_i, e_k) \Big|$$

pour tout $t \in \langle 0, 1 \rangle$ où $r_k(t)$ sont des fonctions de Rademacher. Il résulte du théorème de Landau que

$$1 \geqslant \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{k=1}^{N} r_k(t) \cdot (f_i, e_k) \Big)^2,$$

c'est-à-dire

$$1 \geqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{N} r_k(t) r_1(t) (f_i, e_k)(f_i, e_1).$$

En intégrant cette inégalité dans l'intervalle $\langle 0, 1 \rangle$, on obtient

$$1 \geqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{N} (f_i, e_k)^2$$

et ensuite

$$1 \geqslant \sum_{i=1}^{m} \|f_i\|^2.$$

Le nombre naturel m étant arbitraire, il vient

$$\sum_{i=1}^{m} \|f_i\|^2 \leqslant 1, \quad \text{c. q. f. d.}$$

3. Nous allons démontrer maintenant un théorème plus général que la réponse au problème de Mazur donnée par le corollaire 1.

Définition 4. Nous disons que $\{e_k\}$ est une *base commutative* dans l'espace de Banach X lorsque tout $x \in X$ peut être écrit d'une manière unique sous la forme

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$$

et que la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ est commutativement convergente (a_k étant des nombres réels).

THÉORÈME 3. *Soient X un espace de Banach possédant une base commutative $\{e_k\}$ et $\{f_k\}$ la suite de fonctionnelles linéaires, biorthogonale par rapport au système $\{e_k\}$. Alors pour toute série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ $(x_i \in X)$ commutativement convergente, les séries*

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_{k_i}(x_i) e_{k_i} \tag{5}$$

sont aussi commutativement convergentes, (k_i) étant une suite d'indices quelconque.

Démonstration. Si la base $\{e_k\}$ est commutative, il existe une constante K telle que

$$\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k a^k e_k \Big\| \leqslant K \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \Big\| \tag{6}$$

pour toute suite $\{\gamma_k\}$ où $|\gamma_k| \leqslant 1$ et pour toute série convergente $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$.

La série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ étant commutativement convergente, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un indice n tel que

$$\Big\| \sum_{i=n}^{p} \eta_i x_i \Big\| < \varepsilon \quad \text{pour tout } p > n \text{ et } |\eta_i| \leqslant 1. \tag{7}$$

Soient $r_k(t)$ les fonctions du système de Rademacher. Considérons les fonctions ayant pour valeurs des points de l'espace X et définies par la formule

$$\tilde{x}_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t) f_k(x_i) e_k, \qquad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

On a en vertu de (6) et (7)

$$(8) \qquad \Big\| \sum_{i=n}^{p} \eta_i \tilde{x}_i(t) \Big\| = \Big\| \sum_{i=n}^{p} \eta_i \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t) f_k(x_i) \Big\| = \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t) f_k \Big(\sum_{i=n}^{p} \eta_i x_i \Big) e_k \Big\|$$
$$\leqslant K \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \Big(\sum_{i=n}^{p} \eta_i x_i \Big) e_k \Big\| = K \Big\| \sum_{i=n}^{p} \eta_i \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_i) e_k \Big\| = K \Big\| \sum_{i=n}^{p} \eta_i x_i \Big\| \leqslant K\varepsilon$$

pour $|\eta_i| \leqslant 1$. Soit (k_i) une suite quelconque d'indices. En posant dans (8)

$$\eta_i = r_{k_i}(t)\, \xi_i \quad \text{où} \quad \xi_i = 1 \quad \text{ou} \quad 0,$$

on en déduit

$$\Big\| \sum_{i=n}^{p} r_{k_i}(t)\, \xi_i \tilde{x}_i(t) \Big\| \leqslant K\varepsilon, \qquad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

L'intégration de cette inégalité dans l'intervalle $\langle 0, 1 \rangle$

$$K\varepsilon \geqslant \int_0^1 \Big\| \sum_{i=n}^{p} r_{k_i}(t)\, \xi_i x_i(t) \Big\| \, dt \geqslant \Big\| \sum_{i=n}^{p} \xi_i \int_0^1 r_{k_i}(t) \tilde{x}_i(t)\, dt \Big\|$$
$$= \Big\| \sum_{i=n}^{p} \xi_i \int_0^1 r_{k_i}(t) \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_i) r_k(t) e_k dt \Big\|$$
$$= \Big\| \sum_{i=n}^{p} \xi_i \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_i) e_k \int_0^1 r_{k_i}(t) r_k(t)\, dt \Big\| = \Big\| \sum_{i=n}^{p} \xi_i f_{k_i}(x_i) e_{k_i} \Big\|$$

montre que, pour chaque suite (ξ_i) de valeurs 0 et 1, les séries (5) satisfont à la condition de Cauchy. Elles sont donc commutativement convergentes (voir [6], Satz 1), c. q. f. d.

On peut démontrer par la même méthode le théorème suivant:

THÉORÈME 4. *Soient X un espace de Banach possédant la base commutative $\{e_k\}$ et $\{f_k\}$ la suite biorthogonale par rapport au système $\{e_k\}$. En admettant que la série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ (où $x_i \in X$) est faiblement commutativement convergente, les séries*

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_{k_i}(x_i) e_{k_i}$$

sont faiblement commutativement convergentes pour chaque suite d'indices (k_i).

TRAVAUX CITÉS

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932.

[2] M. M. Day, *Normed linear spaces*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958.

[3] A. Dvoretzky and C. A. Rogers, *Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces*, Proceedings of the National Academy of Sciences (USA) 36 (1950), p. 192-197.

[4] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et les espaces nucléaires*, Memoirs of the American Mathematical Society 16 (1955), Providence (R. I., USA).

[5] S. Kaczmarz und H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, Warszawa-Lwów 1935.

[6] W. Orlicz, *Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen*, Studia Mathematica 1 (1930), p. 83-85.

[7] В. Н. Судаков *Характеризации квазиинвариантности мер в гильдертовом пространстве*, Успехи математических наук 18 (1963), вып. 1 (109), p. 188-190.

Reçu par la Rédaction le 21. 12. 1961