This follows from the fact that

$$\sum_{r>n\geqslant N_r}\frac{1}{N_r}=\sum_{r=2^{2^m}}^{n}\frac{1}{r}>\frac{1}{2}\sum_{r=2^{2^m}}^{2^{2^{m+1}}-1}\frac{1}{r}\sim\tfrac{1}{2}\log 2^{2^m}\to\infty \quad \text{with } m$$

if

$$n=2^{2^m}+\tfrac{1}{2}(2^{2^{m+1}}-2^{2^m})-1.$$

Thus (3) is not satisfied, although (4) is true for every convergent series A. This shows that the answer to Jasek's question is in the negative.

3. The above argument also shows that the condition (3), though sufficient (by the result quoted later), is not necessary for

$$(5)\qquad (a_{N_1}+\ldots+a_{N_n})-(a_1+\ldots+a_n)=O(1) \quad \text{as} \quad n\to\infty$$

to be true for every *convergent* series A satisfying

$$(6)\qquad na_n=O(1) \quad \text{as} \quad n\to\infty.$$

This answers a question, similar to Jasek's, in relation to the following result (Theorem 4 of [1]):

Condition (3) *is necessary and sufficient for* (5) *to be true for every series* A *satisfying* (6).

REFERENCE

[1] P. H. Diananda, *On rearrangement of series, II*, Colloquium Mathematicum 9 (1962), p. 277-279.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF SINGAPORE

Reçu par la Rédaction le 2. 7. 1962

COLLOQUIUM MATHEMATICUM
VOL. X 1963 FASC. 2

SUR LES LOIS DES GRANDS NOMBRES POUR LES VARIABLES ALÉATOIRES DÉPENDANTES À VARIANCES ÉGALEMENT BORNÉES

PAR

I. KOŹNIEWSKA (VARSOVIE)

Un des problèmes les plus intéressants du calcul moderne des probabilités est celui d'étendre aux variables dépendantes les lois limites auxquelles obéissent les variables aléatoires indépendantes. Parmi ces lois, celles des grands nombres, faible et forte, ont été l'objet de nombreuses études.

Bien qu'on connaisse la condition nécessaire et suffisante pour que des variables aléatoires quelconques suivent la loi faible des grands nombres, la recherche d'autres conditions nécessaires et suffisantes se poursuit, vu que la condition connue est difficile à vérifier.

Quant à la loi forte des grands nombres, le problème analogue n'est même pas résolu pour les variables aléatoires indépendantes. En effet, le théorème de Kolmogoroff dont la démonstration est basée sur l'inégalité du même nom, ne donne qu'une condition suffisante pour que la loi forte des grands nombres soit satisfaite par des variables aléatoires indépendantes. P. Lévy [3] est cependant parvenu à démontrer que l'inégalité de Kolmogoroff subsiste pour une certaine classe de variables dépendantes, donc à étendre la loi forte des grands nombres à cette classe de variables aléatoires. Plus tard, Loève [6] a établi une „égalité asymptotique de Kolmogoroff" pour une classe de variables aléatoires encore plus étendue que celle de Lévy, et a démontré que les variables de cette classe obéissent à la loi forte des grands nombres.

D'autre part, plusieurs mathématiciens ont prouvé indépendamment l'un de l'autre que la loi forte des grands nombres est satisfaite pour les variables aléatoires liées par une chaîne de Markoff dont la matrice de passage est régulière.

Le but du présent mémoire est d'établir la plus vaste classe de variables aléatoires dépendantes à variances également bornées qui obéisse à la loi forte des grands nombres. Les raisonnements vont porter sur une suite de variables aléatoires $\{X_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ dont les varian-

ces $D(X_n)$ satisfont aux inégalités

$$D(X_n) \leqslant L^2 \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

§ 1. Loi faible des grands nombres. Par définition, une suite de variables aléatoires $\{X_n\}$ obéit à *la loi faible des grands nombres* si pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{|\sum_{s=1}^{n}[X_s - E(X_s)]|}{n} > \varepsilon\right\} = 0,$$

où $E(X_n)$ est l'espérance mathématique de la variable aléatoire X_n.

On sait (cf. [1], p. 185) que si une suite de variables aléatoires $\{X_n\}$ satisfait à la condition (1), la condition nécessaire et suffisante pour que cette suite obéisse à la loi faible des grands nombres est que la condition de Markoff soit vérifiée, c'est-à-dire que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} D\Big(\sum_{s=1}^{n} X_s\Big) = 0. \tag{2}$$

Vu que

$$D\Big(\sum_{s=1}^{n} X_s\Big) = \sum_{s=1}^{n} D(X_s) + 2\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{t=1}^{n-s} \operatorname{Cov}(X_s, X_{s+t}) \tag{3}$$

où $\operatorname{Cov}(X_s, X_{s+t}) = E(X_s X_{s+t}) - E(X_s)E(X_{s+t})$ est la covariance entre les variables aléatoires X_s et X_{s+t} et en tenant compte de l'inégalité (1), la condition de Markoff peut s'écrire dans le cas considéré sous la forme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{s=1}^{n-1}\sum_{t=1}^{n-s} \operatorname{Cov}(X_s, X_{s+t}) = 0. \tag{4}$$

Lorsque les variables aléatoires de la suite $\{X_n\}$ ne sont pas en corrélation deux à deux c'est-à-dire que $\operatorname{Cov}(X_s, X_t) = 0$ pour $s \neq t$, la condition (4) est évidemment satisfaite. Il est cependant difficile de constater dans d'autres cas si la condition (4) s'avère ou non. C'est sans doute pour cette raison que d'autres critères pour établir si les variables aléatoires obéissent ou non à la loi faible des grands nombres ont été inventés. On connaît deux couples de conditions dont chacun entraîne la condition de Markoff:

(a) La condition (1) avec celle que l'on ait $\operatorname{Cov}(X_s, X_t) \leqslant 0$ pour tout $s \neq t$ (voir [3], p. 246, problème 9).

En effet, divisons les deux membres de l'inégalité (3) par n^2. Le premier membre de cette inégalité est non négatif, tandis que dans le second on a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{s=1}^{n} D(X_s) = 0$ d'après (1). Il en résulte que (4) doit se présenter.

(b) L'inégalité (1) avec la convergence uniforme de R_{st} (coefficient de corrélation entre les variables aléatoires X_s et X_t) vers 0 (cf. [1], p. 193) lorsque $|s-t| \to \infty$.

Notons en outre la forme de la condition de Markoff dans le cas où les variables aléatoires de la suite $\{X_n\}$ ne prennent que les valeurs 0 et 1. Le théorème de Bernstein concernant ce cas est le suivant (cf. [2] p. 93): *si*

$$\begin{aligned} &p_k = P(X_k = 1), && 1-p_k = P(X_k = 0), \\ &p_k^{(i)} = P(X_k = 1 \mid X_i = 1), && 1-p_k^{(i)} = P(X_x = 0 \mid X_i = 1), \\ &\overline{p}_k^{(i)} = P(X_k = 1 \mid X_i = 0), && 1-\overline{p}_k^{(i)} = P(X_k = 0 \mid X_i = 0), \end{aligned} \tag{5}$$

où $i < k$ et $k = 1$ et 2, la condition nécessaire et suffisante pour que la suite des variables aléatoires $\{X_n\}$ obéisse à la loi faible des grands nombres est que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant i\leqslant n} p_i(1-p_i)\left[\frac{\sum_{k=i+1}^{n} p_k}{n} - \frac{\sum_{k=i+1}^{n} p_k^{(i)}}{n}\right] = 0. \tag{6}$$

Cette condition est une conséquence immédiate des égalités évidentes

$$\operatorname{Cov}(X_k, X_i) = p_i(p_k^{(i)} - p_k) = p_i(1-p_i)(p_k^{(i)} - \overline{p}_k^{(i)})$$

et la relation (6) semble se laisser écrire plus simplement sous la forme

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant i<n} \frac{p_i}{n} \sum_{k=i+1}^{n} (p_k^{(i)} - p_k) = 0. \tag{6'}$$

Le couple des conditions (b) peut être généralisé comme il suit:

THÉORÈME 1. *Si une suite de variables aléatoires $\{X_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ satisfait à la condition* (1) *et s'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un entier positif m tel que*

$$\left|\frac{1}{n-m+1} \sum_{t=m}^{n} \operatorname{Cov}(X_s, X_{s+t})\right| < \varepsilon \quad \textit{pour tout } n > m \textit{ et } s = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

la suite $\{X_n\}$ obéit à la loi faible des grands nombres.

Démonstration. Etant donné une suite de variables aléatoires $\{X_n\}$ satisfaisant aux conditions (1) et (7), un $\delta > 0$ arbitraire et un $\varepsilon > 0$ arbitraire tel que $0 < \varepsilon < \delta/2L^2$, associons à cet ε un nombre m

tel que la relation (7) soit vérifiée. Examinons l'expression

$$\frac{1}{n^2}\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{t=1}^{n-s}\operatorname{Cov}(X_s, X_{s+t}) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{t=1}^{m-1}\operatorname{Cov}(X_s, X_{s+t}) + \sum_{s=1}^{n-m}\sum_{t=m}^{n-s}\operatorname{Cov}(X_s, X_{s+t}).$$

On a en tenant compte de (7)

$$\frac{1}{n^2}\left|\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{t=1}^{n-s}\operatorname{Cov}(X_s, X_{s+t})\right| \leqslant \left(\frac{L}{n}\right)^2\left[n(m-1)+\frac{1}{2}(n-m)(n-m+1)\varepsilon\right]$$

$$\leqslant \frac{L^2}{2n}\{2nm+[n^2+n(1-m)+m(m-n)-m]\varepsilon\}$$

$$\leqslant \frac{L^2}{2n}(2m+\varepsilon m).$$

Choisissons maintenant un N tel que l'on ait $L^2m/n < \delta/2$ pour $n > N$. On a alors pour $n > N$

$$\frac{1}{n^2}\left|\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{t=1}^{n-1}\operatorname{Cov}(X_s, X_{s+t})\right| < \delta,$$

donc (4) à plus forte raison.

COROLLAIRE. *Dans le cas d'une suite de variables aléatoires satisfaisant à* (5) *et prenant uniquement les valeurs* 0 *et* 1, *la condition* (7) *peut s'écrire sous la forme*:

Il existe pour tout $\varepsilon > 0$ *un entier positif* m *tel que*

$$\left|\frac{p_i}{n-m+1}\sum_{k=m}^{n}(p_{i+k}^{(i)}-p_{i+k})\right| < \varepsilon \quad \textit{pour tout } n > m \textit{ et tout } i = 1, 2, \ldots$$

THÉORÈME 2. *Si une suite de variables aléatoires* $\{X_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *satisfait à la condition* (1) *et si*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sup_s|\operatorname{Cov}(X_s, X_{s+t})| = 0, \tag{8}$$

la suite $\{X_n\}$ *obéit à la loi faible des grands nombres.*

La démonstration de ce théorème résulte aussitôt de ce que (8) entraîne $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}|\operatorname{Cov}(X_s, X_{s+t})| = 0$, donc aussi (4).

COROLLAIRE. *Dans le cas où les variables aléatoires de la suite* $\{X_n\}$ *satisfont à* (5) *et ne prennent que les valeurs* 0 *et* 1, *la condition* (8) *prend la forme*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sup_i|p_i(p_{i+k}^{(i)}-p_{i+k})| = 0.$$

Introduisons à présent la notation abrégée suivante (analogue à celle de Lévy):

$$E_k'(X_{k+t}) = E(X_{k+t}|\, X_k = x_{i_k}, X_{k-1} = X_{i_{k-1}}, \ldots, X_1 = x_{i_1}), \tag{9}$$

où x_{i_s} $(s = 1, \ldots, k)$ sont des valeurs arbitraires de l'ensemble de celles que prennent les variables aléatoires X_s $(s = 1, \ldots, k)$.

$E_k'(X_{k+t})$ désigne donc l'espérance mathématique de la variable X_k lorsqu'on connaît les valeurs des variables $X_1, \ldots, X_k$. Ainsi $\sup|E_k'(X_{k+t})-E(X_{k+t})|$ par exemple désignera, pour t fixe, la borne supérieure de $|E_k'(X_{k+t})-E(X_{k+t})|$ lorsque les valeurs que prennent les variables $X_1, \ldots, X_k$ varient dans l'ensemble des valeurs admises.

THÉORÈME 3. *Si la suite de variables aléatoires* $\{X_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *satisfait à la condition* (1) *et s'il existe pour tout* $\varepsilon > 0$ *un* N *tel que*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sup|E_k'(X_{k+1})-E(X_{k+1})| < \varepsilon \quad \textit{pour tout } n > N, \tag{10}$$

la suite $\{X_n\}$ *obéit à la loi faible des grands nombres.*

Démonstration. On a en vertu de l'hypothèse

$$|\operatorname{Cov}(X_k, X_{k+t})| \leqslant L\sup|E_k'(X_{k+t})-E(X_{k+1})|$$

$$\leqslant L\sup|E_{k+t-1}'(X_{k+t})-E(X_{k+t})|,$$

d'où en vertu de (10)

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{t=1}^{n-k}|\operatorname{Cov}(X_k, X_{k+t})| \leqslant \varepsilon_n,$$

où $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$. La condition de Markoff (4) est donc satisfaite.

Il est à remarquer que si la suite des variables aléatoires $\{X_n\}$ satisfait aux conditions

$$l^2 \leqslant D(X_n) \leqslant L^2 \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$R_{st} > \varrho > 0 \quad \text{pour} \quad s \text{ et } t = 1, 2, \ldots,$$

elle n'obéit pas à la loi faible des grands nombres (cf. [1], p. 191).

Nous allons nous occuper à présent d'une suite de variables aléatoires $\{X_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ liées par une chaîne de Markoff à r états possibles. La chaîne n'est pas supposée homogène. Désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_r$, où $|x_i| < L$ avec $L > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, les valeurs admises par les variables aléatoires $\{X_n\}$ et introduisons les notations qui suivent:

$$P(X_0 = x_i) = p_{0|i} \quad (i = 1, \ldots, r), \tag{11}$$

$$P(X_{n+1} = x_j | X_n = x_i) = p_{ij}^{(n+1)} \quad (i, j = 1, \ldots, r \text{ et } n = 0, 1, \ldots);$$

P_n = matrice de passage d'ordre r dont les éléments sont désignés par $p_{ij}^{(n)}$ $(i, j = 1, \ldots, r;\ n = 1, 2, \ldots)$;

$H_{mn} = \prod_{s=m+1}^{n} P_s$ = produit des matrices de passage (c'est une matrice d'ordre r dont les éléments sont désignés par $h_{ij}(m, n)$ où $i, j = 1, \ldots, r$, $m = 0, 1, \ldots$ et $n > m$);

$$p_{n|i} = \sum_{j=1}^{r} p_{0|j} h_{ij}(0, n) \quad (i = 1, \ldots, r \text{ et } n = 1, 2, \ldots).$$

On a alors

$$P(X_s = x_i) = p_{s|i} \quad (i = 1, \ldots, r \text{ et } s = 0, 1, \ldots),$$

$$P(X_{s+t} = x_j | X_s = x_i) = h_{ij}(s, s+t) \quad (i, j = 1, \ldots, r, s = 0, 1, \ldots \text{ et } t = 1, 2, \ldots),$$

$$\sum_{i=1}^{r} p_{n|i} = 1 \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

$$\sum_{j=1}^{r} h_{ij}(s, s+t) = 1 \quad (i = 1, \ldots, r, s = 0, 1, \ldots \text{ et } t = 1, 2, \ldots)$$

et évidemment

$$h_{ij}(s, s+1) = p_{ij}^{(s+1)} \quad (i, j = 1, \ldots, r \text{ et } s = 0, 1, \ldots).$$

Les paramètres des variables aléatoires considérées se laissent écrire comme suit:

$$E(X_s) = \sum_{i=1}^{r} x_i p_{s|i} \quad (s = 0, 1, \ldots),$$

$$D(X_s) \leqslant L^2 \quad (s = 0, 1, \ldots),$$

la condition (1) est donc vérifiée;

$$E(X_{s+t} | X_s = x_i) = \sum_{j=1}^{r} x_j h_{ij}(s, s+t) \quad (s = 0, 1, \ldots \text{ et } t = 1, 2, \ldots),$$

$$E(X_s X_{s+t}) = \sum_{i=1}^{r} x_i p_{s|i} \sum_{j=1}^{r} x_j h_{ij}(s, s+t) = \sum_{i=1}^{r} x_i p_{s|i} E(X_{s+t} | X_s = x_i)$$
$$(s = 0, 1, \ldots \text{ et } t = 1, 2, \ldots);$$

enfin,

$$\operatorname{Cov}(X_s, X_{s+t}) = \sum_{i=1}^{r} x_i p_{s|i} [E(X_{s+t} | X_s = x_i) - E(X_{s+t})] \tag{12}$$
$$= \sum_{i=1}^{r} x_i p_{s|i} \sum_{j=1}^{r} x_i [h_{ij}(s, s+t) - p_{s+t|j}].$$

Pour faire usage du théorème 3 dans le cas de variables aléatoires liées par une chaîne de Markoff, introduisons la notion de chaîne d'ergodicité stationnaire de degré α (cf [9]).

Définition 1. Une chaîne de Markoff dont les matrices de passage sont P_n $(n = 1, 2, \ldots)$ est *d'ergodicité stationnaire de degré* α, lorsqu'il existe un nombre α tel que $0 < \alpha \leqslant 1$ et qu'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ et tous $i, j, k = 1, \ldots, r$ un N à partir duquel on a

$$\frac{1}{n^\alpha} \sum_{i=}^{n} |h_{ij}(s, s+t) - h_{kj}(s, s+t)| < \varepsilon \tag{13}$$

pour tout $s = 0, 1, \ldots$ $(n > N)$.

Théorème 3'. *Toute suite de variables aléatoires* $\{X_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ *liées par une chaîne de Markoff à un nombre fini d'états et dont l'ergodicité stationnaire est de degré* $\alpha = 1$ *obéit à la loi faible des grands nombres.*

Démonstration. Multiplions par p_{sk} les deux membres des inégalité (13) pour $k = 1, \ldots, r$ et prenons-en la somme suivant k. On trouve successivement

$$\sum_{k=1}^{r} p_{s|k} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |h_{ij}(s, s+t) - h_{kj}(s, s+t)| < \varepsilon$$

et à plus forte raison

$$\sum_{i=1}^{r} \left| \sum_{k=1}^{r} p_{s|k} \frac{1}{n} [h_{ij}(s, s+t) - h_{kj}(s, s+t)] \right| < \varepsilon,$$

d'où

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |h_{ij}(s, s+t) - p_{s+t|j}| < \varepsilon. \tag{14}$$

Il résulte de l'estimation

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sup|E'_s(X_{s+t})-E(X_{s+t})|$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sup_i\Big|\sum_{j=1}^{r}x_j[h_{ij}(s,s+t)-p_{s+t|j}]\Big|$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sup_i\sum_{j=1}^{r}|x_j[h_{ij}(s,s+t)-p_{s+t|j}]$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}\sup_i|x_j|\,|h_{ij}(s,s+t)-p_{s+t|j}|$$

$$\leqslant L\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sup_i|h_{ij}(s,s+t)-p_{s+t|j}|\leqslant Lr\varepsilon$$

que la suite $\{X_n\}$ satisfait à (10). Reste à appliquer le théorème 3.

§ 2. Loi forte des grands nombres. Par définition, une suite de variables aléatoires $\{X_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ obéit à *la loi forte des grands nombres* si l'on peut associer à tout couple de nombres, $\varepsilon>0$ et $\eta>0$, un entier positif N tel que pour tout entier positif r la probabilité pour que r inégalités

$$\frac{|S_n-E(S_n)|}{n}<\varepsilon \quad \text{où} \quad n=N+1,\ldots,N+r$$

soient satisfaites simultanément, soit inférieure à $1-\eta$ (S_n étant ici la somme de n premières variables, $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$). Alors on dit aussi que la variable aléatoire $\frac{S_n-E(S_n)}{n}$ tend à 0 *presque certainement*, ou *presque sûrement* ou *avec la probabilité* 1.

On connaît cinq conditions (ou couples de conditions) suffisantes pour qu'une suite de variables aléatoires $\{X_n\}$ assujettie à (1) obéisse à la loi forte des grands nombres. Les voici:

(c) $E'_n(X_{n+1})=E(X_n)$ pour tout $n=1,2,\ldots$ (cf. [5]).

(d) Convergence de $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sup|E'_i(X_{i+1})-E(X_{i+1})|$ vers 0 avec $\frac{1}{n}$ (cf. [6], théorème H).

(e) Equivalence des variables aléatoires $\{X_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ (cf. [7]).

(f) La suite $\{X_n\}$ où $-\infty<n<+\infty$ est stationnaire et il existe les espérances mathématiques $E(X_n)$.

Pour assurer la convergence presque certaine de $\frac{S_n-E(S_n)}{n}$ vers 0, il suffit d'y ajouter la condition (2) (cf. [8]).

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\operatorname{Cov}(X_i,X_n)<\infty$ (cf. [4]).

C'est la condition (d) qui se laisse généraliser le plus facilement, à savoir en généralisant le lemme de Kolmogoroff sur lequel repose la démonstration du théorème de Kolmogoroff relatif aux variables aléatoires indépendantes.

En outre, M. Loève a établi un théorème (cf. [6]) d'après lequel si l'on a (1) et s'il existe un nombre β tel que $0<\beta<\frac{1}{2}$ et que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1/2+\beta}}\sum_{s=1}^{n}\sup|E'_s(X_{s+1})-E(X_{s+1})|=0,$$

la suite $\{X_n\}$ obéit à la loi forte généralisée des grands nombres, à savoir $\frac{S_n-E(S_n)}{n^{\beta+\gamma+1/2}}$ tend presque sûrement vers 0 pour tout $\gamma>0$. Ce théorème se laisse également généraliser.

LEMME GÉNÉRALISÉ DE KOLMOGOROFF. *Soit A_n l'ensemble des valeurs de la variable aléatoire X_n $(n=1,2,\ldots)$. Lorsqu'il existe un a tel que $0<a\leqslant 1$ et que l'on peut associer à tout $\varepsilon>0$ un entier positif N tel que*

$$\frac{1}{n^a}\sum_{s=1}^{n}\sup|E'_k(X_{s+k})-E(X_{s+k})|<\varepsilon \tag{15}$$

pour tout $n>N$ et tout $k=1,2,\ldots$,

on a

$$P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k-m_k|\geqslant n^aC\}\leqslant\frac{D(S_n)M}{n^{2a}C^2} \tag{16}$$

pour tout $n>N$ et tout $C>0$,

où $m_k=E(S_k)$ pour $k=1,2,\ldots$ et $M>1$ est une constante.

Démonstration. Etant donné un $C>0$ arbitraire et un $n>N$, soit Z l'événement consistant en ce qu'une au moins des n inégalités

$$|S_k-m_k|<n^aC \quad (k=1,\ldots,n)$$

n'est pas vérifiée. Considérons les variables aléatoires Y_k $(k=1,\ldots,n)$ telles que

$$Y_k=\begin{cases}1 \text{ si } |S_k-m_k|\geqslant n^aC, \text{ mais } |S_l-m_l|<n^aC \text{ pour } l=1,2,\ldots,k-1,\\ 0 \text{ dans tous les autres cas.}\end{cases}$$

En tout point de l'espace des échantillons, on a $Y_k = 1$ tout au plus pour un k ($k = 1, \dots, n$). On a donc en tout point de cet espace $\sum_{k=1}^{n} Y_k = 0$ ou 1, d'où $E(\sum_{k=1}^{n} Y_k) = P\big(\sum_{k=1}^{n} (Y_k = 1)\big) = P(Z)$, et par conséquent $(S_n - m_n)^2 \sum_{k=1}^{n} Y_k \leqslant (S_n - m_n)^2$, d'où $E[(S_n - m_n)^2 \sum_{k=1}^{n} Y_k] \leqslant D(S_n)$, c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n} [E(Y_k (S_n - m_n)^2] \leqslant D(S_n). \tag{17}$$

Introduisons la notation

$$U_k = \sum_{l=k}^{n} [X_l - E(X_l)] \quad (k = 1, \dots, n),$$

qui nous servira dans l'évaluation des composantes du membre gauche de l'inégalité (17). On a

$$S_n - m_n = (S_k - m_k) + U_{k+1} \quad (k = 1, \dots, n-1),$$

$$E[Y_k (S_n - m_n)^2] = E[Y_k (S_k - m_k)^2] + 2E[Y_k U_{k+1}(S_k - m_k)] + E(Y_k U_{k+1}^2)$$

$$\geqslant E[Y_k (S_k - m_k)^2] + 2E[Y_k U_{k+1}(S_k - m_k)]$$

$$= \{E[(S_k - m_k)^2 | Y_k = 1] + 2E[U_{k+1}(S_k - m_k) | Y_k = 1]\} P(Y_k = 1).$$

En portant dans (17) l'évaluation obtenue, on trouve

$$D(S_n) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \{E[(S_k - m_k)^2 | Y_k = 1] + 2E[U_{k+1}(S_k - m_k) | Y_k = 1]\} P(Y_k = 1)$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{n} \{n^{2\alpha} C^2 + 2n^{\alpha} C E[\sum_{s=k+1}^{n} (X_s - E(X_s)) | Y_k = 1]\} P(Y_k = 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \{n^{2\alpha} C^2 + 2n^{\alpha} C \sum_{s=1}^{n} [E(X_{s+k} | Y_k = 1) - E(X_{s+k})]\} P(Y_k + 1).$$

En vertu de la formule suivante, facile à établir:

$$E(Y_{s+k} | X^k \in A'_k, \dots, X_l \in A'_l) \leqslant \sup_{\substack{x_{i_l} \in A'_l \\ l=1,\dots,k}} E(X_{s+k} | X_k = x_{i_k}, \dots, X_1 = x_{i_1})$$

$$\leqslant \sup_{\substack{x_{i_l} \in A_l \\ l=1,\dots,k}} E(X_{s+k} | X_k = x_{i_k}, \dots, X_1 = x_{i_1}),$$

$$A'_l \subset A_l \text{ et } l = 1, 2, \dots, k,$$

il vient

$$\Big|\sum_{s=1}^{n-k} [E(X_{s+k} | Y_k = 1) - E(X_{s+k})]\Big| \leqslant \sum_{s=1}^{n} |E(X_{s+k} | Y_k = 1) - E(X_{s+k})|$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{n} \sup |E'_k(X_{s+k}) - E(X_{s+k})| \leqslant \varepsilon_n n^{\alpha}$$

où $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$ d'après la condition (15).

Ainsi,

$$D(S_n) \geqslant \sum_{k=1}^{n} (n^{2\alpha} C^2 - 2n^{2\alpha} C \varepsilon_n) P(Y_k = 1),$$

c'est-à-dire

$$D(S_n) \geqslant n^{2\alpha} C^2 \left(1 - \frac{2\varepsilon_n}{C}\right) P(Z),$$

ce qui entraîne

$$P(Z) \leqslant \frac{D(S_n)}{n^{2\alpha} C^2 (1 - 2\varepsilon_n / C)}.$$

Cependant, on a

$$\frac{1}{1 - 2\varepsilon_n / C} \leqslant 1 + \varepsilon'_n \quad \text{où} \quad \lim_{n \to \infty} \varepsilon'_n = 0.$$

Par conséquent

$$P(Z) \leqslant \frac{D(S_n) M}{n^{2\alpha} C^2} \quad \text{pour} \quad n > N,$$

où $M > 1$ est une constante.

THÉORÈME 4. *Si une suite de variables aléatoires* $\{X_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) *satisfait à la condition* (1) *et la série*

$$\sum_{s=1}^{\infty} \sup |E'_s(X_{s+1}) - E(X_{s+1})| \tag{18}$$

converge, $(S_n - m_n)/n^{\alpha}$ *converge presque sûrement vers* 0 *pour tout* $\alpha > \frac{1}{2}$.

Démonstration. La série $\sum_{s=1}^{\infty} \sup |E'_k(X_{s+k}) - E(X_{s+k})|$ converge uniformément suivant $k = 1, 2, \dots$, puisque elle est majorée par la série (18), qui est convergente par hypothèse. Par conséquent, la condition (15) est satisfaite pour tout $\alpha > 0$, ce qui permet d'appliquer à la suite $\{X_n\}$ le lemme généralisé de Kolmogoroff. On a donc pour tout $\alpha > 0$, tout $C > 0$ et tout $n > N$

$$P\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k - m_k| \geqslant n^{\alpha} C\} \leqslant \frac{D(S_n) M_1}{n^{2\alpha} C^2} \quad \text{où} \quad M_1 > 1. \tag{19}$$

Pour évaluer $D(S_n)$, on a la formule

$$D(S_n) = \sum_{s=1}^{n} D(X_s) + 2 \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} \operatorname{Cov}(X_s, X_{s+t})$$

et les conditions (1) et (18), d'où

$$D(S_n) \leqslant L^2 n + 2n M_2 \leqslant M_3 n,$$

où $M_2 > 0$ et $M_3 > 0$ sont des constantes.

On a donc pour tout $C>0$ et $n>N$ et pour tout a tel que $0<a\leqslant 1$

$$P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k-m_k|\geqslant n^aC\}\leqslant\frac{M}{n^{2a-1}C^2}, \tag{20}$$

où $M>0$ est une constante. Soit $\gamma>0$ arbitraire. Il s'ensuit de (20) que

$$P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{|S_k-m_k|}{n^{a+\gamma}}\geqslant\frac{C}{n^\gamma}\right\}\leqslant\frac{M}{n^{2a-1}}C^2 \quad \text{pour} \quad n>N.$$

En y posant $C=n^{\gamma'}$ où $0<\gamma'<\gamma$, on en tire

$$P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{|S_k-m_k|}{n^{a+\gamma}}\geqslant\frac{1}{n^{\gamma-\gamma'}}\right\}\leqslant\frac{M}{n^{2a-1+2\gamma'}} \quad \text{pour} \quad n>N.$$

Posons à présent $a>\frac{1}{2}$ et $n=2^\nu$ $(\nu=1,2,\ldots)$. La série $\sum_{\nu=1}^{\infty}2^{-\nu(2a-1+2\gamma')}$ converge et d'après le lemme de Borel-Cantelli $\max_{1\leqslant k\leqslant 2^\nu}\frac{|S_k-m_k|}{2^{\nu(2+\gamma)}}$ converge alors presque certainement vers 0. Soit $2^{\nu-1}\leqslant n<2^\nu$. On a alors

$$\frac{1}{2^{\nu(a+\gamma)}}>\frac{1}{(2n)^{a+\gamma}} \quad \text{et} \quad \max_{1<k\leqslant 2^\nu}\frac{|S_k-m_k|}{2^{\nu(a+\gamma)}}$$

convergeant presque sûrement vers 0, $(S_n-m_n)/n^{2+\lambda}$ converge à plus forte raison presque sûrement vers 0 (quel que soit $\gamma>0$ et $a>\frac{1}{2}$).

THÉORÈME 5. *Si une suite de variables aléatoires* $\{X_k\}$ $(n=1,2,\ldots)$ *satisfait à la condition* (1) *et s'il existe un* a *tel que* $0<a<1$ *et que l'on peut associer à tout* $\varepsilon>0$ *un entier positif* N *tel que*

$$\frac{1}{n^a}\sum_{s=1}^{n}\sup|E'_t(X_{s+t})-E(X_{s+t})|<\varepsilon \tag{21}$$

pour tout $n>N$ *et tout* $t=1,2,\ldots$, $(S_n-m_n)/n$ *converge presque sûrement vers* 0.

Démonstration. Il résulte de (21) d'après le lemme généralisé de Kolmogoroff que

$$P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k-m_k|\geqslant n^aC\}\leqslant\frac{D(S_n)M_1}{n^{2a}C^2}$$

pour tout $n>N$ et tout $C>0$, $M_1>1$ étant une constante. En posant $C=n^{1-a}\varepsilon$, où $\varepsilon>0$ est arbitraire, il vient

$$P\left\{\max_{\leqslant i\leqslant n}\frac{|S_k-m_k|}{n}\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant\frac{D(S_n)M_1}{n^2\varepsilon^2}.$$

Evaluons la variance $D(S_n)$. On a

$$D(S_n)\leqslant L^2n+2M_2n^{1+a}\leqslant M_3n^{1+a}$$

où $M_2>0$ et $M_3>0$ sont des constantes. On en tire

$$P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{|S_k-m_k|}{n}\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant\frac{M_4}{n^{1-a}\varepsilon}$$

où $M_4>0$ est une constante. Si l'on pose $n=2^\nu$ $(\nu=1,2,\ldots)$, la série $\sum_{\nu=1}^{\infty}2^{-\nu(1-a)}$ converge, vu que $0<a<1$ par hypothèse. On conclut donc en vertu du lemme de Borel-Cantelli que

$$\max_{1<k\leqslant 2^\nu}\frac{|S_k-m_k|}{2^\nu} \text{ converge presque sûrement vers 0.} \tag{22}$$

En posant $2^{-1}\leqslant n<2^\nu$, on a $1/2^\nu>1/2n$ et (22) entraîne la thèse du théorème.

Nous allons envisager à présent une suite de variables aléatoires $\{X_n\}$ $(n=0,1,\ldots)$ liées en une chaîne de Markoff et voir, en gardant les notations (11) introduites, quelle est la forme que prennent dans ce cas les conditions suffisantes qui viennent d'être étudiées, pour que ces variables obéissent à la loi forte des grands nombres.

Une telle suite de variables aléatoires satisfait à la condition (1) et, vu la propriété de la chaîne de Markoff, on a

$$\begin{aligned}E'_{n-1}(X_n)&=\sum_{j=1}^{r}x_jP(X_n=x_j\,|\,X_{n-1}=x_i,\ X_{n-2}=x_{i_2},\ldots,X_0=x_{i_{n-1}})\\&=\sum_{j=1}^{r}x_jP(X_n=x_j\,|\,X_{n-1}=x_i)\\&=\sum_{j=1}^{r}x_jp_{ij}^{(n)}.\end{aligned}$$

La condition de Lévy (voir (c), p. 296) prend alors la forme

$$\sum_{j=1}^{r}x_j(p_{ij}^{(n)}-p_{n|j})=0 \quad (n=1,2,\ldots \text{ et } i=1,\ldots,r). \tag{23}$$

Dans le cas particulier où les variables aléatoires X_n $(n=0,1,\ldots)$ ont la distribution des 0 et 1, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned}P(X_n=1)&=p_{n|1}\\P(X_n=0)&=1-p_{n|1}\end{aligned} \qquad (n=0,1,\ldots), \tag{24}$$

la condition (23) se réduit à la suivante:

$$p_{ij}^{(n)} = p_{n|j} \quad (n = 1, 2, \dots \text{ et } i, j = 1, \dots, r);$$

la matrice de passage P_n est donc ergodique pour tout $n = 1, 2, \dots$ Les variables aléatoires X_n sont ici indépendantes.

La condition de Loève (voir (d), p. 296) peut s'écrire dans le cas d'une suite de variables aléatoires $\{X_n\}$ liées en une chaîne de Markoff sous la forme

$$\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} \max_i \left| \sum_{j=1}^{r} x_j (p_{ij}^{(s)} - p_{s|j}) \right| = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

ce qui revient en particulier dans le cas (24) de variables aléatoires ne prenant que les valeurs 0 et 1 à

$$\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} \max_i |p_{i1}^{(s)} - p_{s|1}| = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Quant à l'application du théorème 4 à une suite de variables aléatoires $\{X_n\}$ liées en une chaîne de Markoff, la condition (18) devient

$$\sum_{s=1}^{\infty} \max_i \left| \sum_{j=1}^{r} x_j (p_{ij}^{(s)} - p_{s|j}) \right| < \infty. \tag{25}$$

En particulier, dans le cas (24), la condition (25) devient

$$\sum_{s=1}^{\infty} \max_i |p_{i1}^{(s)} - p_{s|1}| < \infty.$$

En rapport avec le théorème 4, on peut introduire la définition suivante qui en simplifiera l'énoncé dans le cas d'une suite de variables aléatoires liées en une chaîne de Markoff:

Définition 2. Une chaîne de Markoff dont les matrices de passage sont P_n $(n = 1, 2, \dots)$ est *extra-ergodique* lorsque

$$\sum_{s=1}^{\infty} \max_i |p_{ij}^{(s)} - p_{s|j}| < \infty \quad \text{pour tout } j = 1, 2, \dots, r.$$

THÉORÈME 4'. *Si une suite de variables aléatoires* $\{X_n\}$ $(n = 0, 1, \dots)$ *est liée en une chaîne de Markoff extra-ergodique,*

$$\frac{S_n - m_n}{n^{\alpha}} \text{ tend presque sûrement vers } 0 \text{ pour tout } \alpha > \tfrac{1}{2}. \tag{26}$$

Démonstration. Il suffit de montrer que la condition (18) du théorème 4 est satisfaite pour les variables considérées. Or cela résulte

de l'estimation

$$\sum_{j=1}^{n} \sup |E'_s(X_{s+1}) - E(X_{s+1})| = \sum_{s=1}^{n} \max_i \left| \sum_{j=1}^{r} x_j (p_{ij}^{(s+1)} - p_{s+1|j}) \right|$$

$$\leqslant L \sum_{s=1}^{n} \max_i \sum_{j=1}^{r} |p_{ij}^{(s+1)} - p_{s+1|j}| \leqslant L \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} \max_i |p_{ij}^{(s+1)} - p_{s+1|j}|$$

$$= L \sum_{j=1}^{r} \sum_{s=1}^{n} \max_i |p_{ij}^{(s+1)} - p_{s+1|j}|.$$

En particulier, une suite de variables aléatoires liées par une matrice de passage régulière est extra-ergodique (cf. [9], théorème 6); elle obéit par conséquent pour tout $\alpha > \frac{1}{2}$ à la loi forte des grands nombres de la forme (26).

Quant aux conséquences du théorème 5 pour une suite de variables aléatoires liées en une chaîne de Markoff, on a d'abord

$$E'_t(X_{s+t}) = E(X_{s+t}|X_t = x_i) = \sum_{j=1}^{r} x_j h_{ij}(t, s+t).$$

Pour de telles variables aléatoires, la condition (21) prend la forme suivante: il existe un α tel que $0 < \alpha < 1$ et que l'on peut associer à tout $\varepsilon > 0$ un entier positif N tel que

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{s=1}^{n} \max_i \left| \sum_{j=1}^{r} x_j [h_{ij}(t, s+t) - p_{s+t|j}] \right| < \varepsilon \tag{27}$$

pour tout $n > N$ et tout $t = 1, 2, \dots$

Si les variables aléatoires X_n ont les distributions (24) et sont liées en une chaîne de Markoff, la condition (21) se simplifie: il existe un α tel que $0 < \alpha < 1$ et que l'on peut associer à tout $\varepsilon > 0$ un entier positif N tel que

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{s=1}^{n} \max_i |h_{j1}(t, s+t) - p_{s+t|1}| < \varepsilon \tag{28}$$

pour tous $n > N$ et tout $t > 1, 2, \dots$

Si l'on tient compte de la définition 1 (p. 295), on déduit du théorème 5 la conséquence qui suit:

THÉORÈME 5'. *Toute suite de variables aléatoires* $\{X_n\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ *liée en une chaîne de Markoff d'une ergodicité stationnaire de degré* α *où* $0 < \alpha < 1$ *obéit à la loi forte des grands nombres;* $(S_n - m_n)/n$ *tend donc presque sûrement vers* 0.

Démonstration. Il suffit de montrer que la condition (27) est satisfaite. Or cela résulte de l'estimation

$$\frac{1}{n^{\alpha}}\sum_{s=1}^{n}\max_{i}\Big|\sum_{j=1}^{r}x_j[h_{ij}(t,s+t)-p_{s+t|j}]\Big|$$

$$\leqslant\frac{1}{n^{\alpha}}\sum_{s=1}^{n}\max_{i}\sum_{j=1}^{r}|x_j|\,|h_{ij}(t,s+t)-p_{s+t|j}|$$

$$\leqslant L\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{n^{\alpha}}\sum_{s=1}^{n}\max_{i}|h_{ij}(t,s+t)-p_{s+t|j}|$$

et d'une propriété des chaînes d'une ergodicité stationnaire de degré α où $0<\alpha\leqslant 1$ (cf. [9], lemme).

En terminant, je tiens à remercier les professeurs E. Marczewski, C. Ryll-Nardzewski et K. Urbanik pour leurs conseils concernant la rédaction définitive de ce mémoire.

TRAVAUX CITÉS

[1] С. Н. Бернштейн, *Теория вероятностей*, Москва-Ленинград 1946.

[2] — *Распространение предельной теоремы вероятностей на суммы зависимых величин*, Успехи Математических Наук 10 (1944), p. 65-114.

[3] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, vol. I, New York 1957.

[4] E. Frankx, *Sur la convergence forte*, Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungs-Mathematiker 59 (1959), Nr. 2, p. 293-296.

[5] P. Lévy, *Loi forte des grands nombres pour les variables enchaînées*, Journal de mathématiques pures et appliquées 15 (1936), p. 11-24.

[6] M. Loève, *Etude asymptotique des sommes de variables aléatoires liées*, ibidem 24 (1945), p. 249-318.

[7] B. de Finetti, *La legge dei grandi numeri nel caso dei numeri aleatori equivalenti*, Atti della Accademia Nazionale dei Lincei 18 (1933), p. 203-207.

[8] A. Kolmogoroff, *Ein einfacher Beweis des Birkhoff-Khintchinschen Ergodensatzes*, Математический Сборник 2 (44) (1937), p. 367-368.

[9] I. Koźniewska, *Ergodicité et stationnarité des chaînes de Markoff variables à un nombre fini d'états possibles*, Colloquium Mathematicum 9 (1962), p. 333-346.

Reçu par la Rédaction le 21. 2. 1962

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. X . 1963 FASC. 2

SUR LE CONTACT DES COURBES DANS LES ESPACES MÉTRIQUES GÉNÉRAUX

PAR

S. GOŁĄB ET Z. MOSZNER (CRACOVIE)

§ 1. La théorie des courbes dans les espaces métriques généraux entre progressivement dans le domaine de plus en plus vaste, dominé par la géométrie différentielle classique des courbes. Il y a quelques années, parut la note de Haantjes et Nottrot [1], dans laquelle les auteurs ont introduit la notion de direction (appliquée au point fixé d'un espace métrique général), notion fondée sur celle de mesure d'un angle, introduite par Menger [2] pour les triplets. Cependant cette notion de mesure, bien adaptée à l'avis de Haantjes à l'espace euclidien, n'est pas généralement adéquate. C'est pourquoi l'idée nous est venue de baser la notion de direction sur une autre qui nous semble bien adaptée aux espaces généraux, à savoir sur celle de contact des arcs simples. Les arcs simples (ensembles des points homéomorphes au segment $0\leqslant x\leqslant 1$) peuvent ne pas exister dans un espace métrique général. Tel est par exemple l'espace quelconque avec la métrique zéro-un, ou bien un ensemble au plus dénombrable quelconque avec la métrique arbitraire. Nous n'allons pas nous occuper ici de l'existence des arcs simples dans les espaces considérés, mais envisagerons plus précisément la notion de contact entre eux dans les espaces métriques généraux (autant qu'il y existent), discuter les difficultés liés à cette notion et, entre autres, établir un théorème qui n'est pas connu à notre avis même pour les espaces euclidiens.

§ 2. Soit E l'espace pourvu d'une métrique satisfaisant aux postulats connus de Fréchet. Les éléments de l'espace E, appelés dans la suite les *points*, seront désignés par des minuscules latines, les majuscules latines étant reservées pour désigner les courbes, en particulier les arcs simples. La distance entre p et q sera designée par $\varrho(p,q)$.

La distance d'un point $a\in E$ à l'ensemble $A\subset E$, définie par la formule

$$\varrho(a,A)\overset{\mathrm{df}}{=}\inf_{x\in A}\varrho(a,x), \tag{1}$$

peut ne pas être atteinte pour certains points $x\in A$. Toutefois, si l'ensemble A est compact, il existe pour tout $a\in A$ au moins un point $x\in A$ pour lequel cette distance est atteinte.