COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. X 1963 FASC. 2

ON REARRANGEMENT OF SERIES, III

BY

P. H. DIANANDA (SINGAPORE)

1. Let the series $a_{N_1}+a_{N_2}+\ldots$ be a rearrangement in the order of its terms of the series $a_1+a_2+\ldots$ (or the series A) of complex terms.

Recently we proved the following result (Theorem 2 of [1]):

A necessary and sufficient condition that

$$(1) \qquad (a_{N_1}+\ldots+a_{N_n})-(a_1+\ldots+a_n)\to 0 \quad \textit{as} \quad n\to\infty$$

be true for every series A satisfying

$$(2) \qquad na_n\to 0 \quad \textit{as} \quad n\to\infty$$

is that

$$(3) \qquad \sum_{r>n\geqslant N_r}\frac{1}{N_r}=O(1) \quad \textit{as} \quad n\to\infty.$$

In connection with this result, B. Jasek kindly asked us whether we could give a negative answer to the following question:

Is the condition (3), *which is clearly sufficient, also necessary for* (1), *or equivalently*

$$(4) \qquad a_{N_1}+a_{N_2}+\ldots=a_1+a_2+\ldots,$$

to be true for every convergent series A satisfying (2)?

We shall show that the answer is indeed in the negative.

2. Let

$$N_1=1 \quad \text{and} \quad N_{2^{2^m}+s}=2^{2^{m+1}}-s-1 \qquad (m\geqslant 0,\ 0\leqslant s<2^{2^{m+1}}-2^{2^m}).$$

Then it is clear that $a_{N_1}+a_{N_2}+\ldots$ is a rearrangement, of the series A, which merely reverses the order of the terms in each of the blocks

$$a_{2^{2^m}}+\ldots+a_{2^{2^{m+1}}-1} \qquad (m\geqslant 0).$$

Thus (4) is satisfied for every convergent series A, irrespective of whether (2) is satisfied or not. This follows by an application of Cauchy's general principle of convergence. On the other hand, (3) is not satisfied.

This follows from the fact that

$$\sum_{r>n\geqslant N_r}\frac{1}{N_r}=\sum_{r=2^{2m}}^{n}\frac{1}{r}>\frac{1}{2}\sum_{r=2^{2m}}^{2^{2m+1}-1}\frac{1}{r}\sim\tfrac{1}{2}\log 2^{2^m}\to\infty \quad \text{with } m$$

if

$$n=2^{2^m}+\tfrac{1}{2}(2^{2^{m+1}}-2^{2^m})-1.$$

Thus (3) is not satisfied, although (4) is true for every convergent series A. This shows that the answer to Jasek's question is in the negative.

3. The above argument also shows that the condition (3), though sufficient (by the result quoted later), is not necessary for

(5) $$(a_{N_1}+\ldots+a_{N_n})-(a_1+\ldots+a_n)=O(1) \quad \text{as} \quad n\to\infty$$

to be true for every *convergent* series A satisfying

(6) $$na_n=O(1) \quad \text{as} \quad n\to\infty.$$

This answers a question, similar to Jasek's, in relation to the following result (Theorem 4 of [1]):

Condition (3) *is necessary and sufficient for* (5) *to be true for every series* A *satisfying* (6).

REFERENCE

[1] P. H. Diananda, *On rearrangement of series, II*, Colloquium Mathematicum 9 (1962), p. 277-279.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF SINGAPORE

Reçu par la Rédaction le 2. 7. 1962

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. X 1963 FASC. 2

SUR LES LOIS DES GRANDS NOMBRES POUR LES VARIABLES ALÉATOIRES DÉPENDANTES À VARIANCES ÉGALEMENT BORNÉES

PAR

I. KOŹNIEWSKA (VARSOVIE)

Un des problèmes les plus intéressants du calcul moderne des probabilités est celui d'étendre aux variables dépendantes les lois limites auxquelles obéissent les variables aléatoires indépendantes. Parmi ces lois, celles des grands nombres, faible et forte, ont été l'objet de nombreuses études.

Bien qu'on connaisse la condition nécessaire et suffisante pour que des variables aléatoires quelconques suivent la loi faible des grands nombres, la recherche d'autres conditions nécessaires et suffisantes se poursuit, vu que la condition connue est difficile à vérifier.

Quant à la loi forte des grands nombres, le problème analogue n'est même pas résolu pour les variables aléatoires indépendantes. En effet, le théorème de Kolmogoroff dont la démonstration est basée sur l'inégalité du même nom, ne donne qu'une condition suffisante pour que la loi forte des grands nombres soit satisfaite par des variables aléatoires indépendantes. P. Lévy [3] est cependant parvenu à démontrer que l'inégalité de Kolmogoroff subsiste pour une certaine classe de variables dépendantes, donc à étendre la loi forte des grands nombres à cette classe de variables aléatoires. Plus tard, Loève [6] a établi une „égalité asymptotique de Kolmogoroff" pour une classe de variables aléatoires encore plus étendue que celle de Lévy, et a démontré que les variables de cette classe obéissent à la loi forte des grands nombres.

D'autre part, plusieurs mathématiciens ont prouvé indépendamment l'un de l'autre que la loi forte des grands nombres est satisfaite pour les variables aléatoires liées par une chaîne de Markoff dont la matrice de passage est régulière.

Le but du présent mémoire est d'établir la plus vaste classe de variables aléatoires dépendantes à variances également bornées qui obéisse à la loi forte des grands nombres. Les raisonnements vont porter sur une suite de variables aléatoires $\{X_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ dont les varian-