COROLLARY. *In the case of the unitary convolution, the set P is void; hence $s = 0$, and so there is only one maximal ideal, consisting of all functions vanishing for $n = 1$.*

Consequently we infer that every function $f(n)$ non-vanishing for $n = 1$ has an inverse in the unitary ring B_U, or, in other words, if f has an inverse g in R_U, and the series $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|$ is convergent, then the series $\sum_{n=1}^{\infty} |g(n)|$ is also convergent.

From the theorem 5.8 in [5] we infer that in the Dirichlet case the algebra B_A is semisimple. From the remark, that every other algebra B_A has nilpotent elements it follows that the semisimplicity of B_A is a characteristic property of the Dirichlet convolution.

REFERENCES

[1] E. T. Bell, *Factorability of numerical functions*, Bulletin of the American Mathematical Society 37 (1931), p. 251-253.

[2] E. Cohen, *Arithmetical functions associated with the unitary divisors of an integer*, Mathematische Zeitschrift 74 (1960), p. 66-80.

[3] — *Unitary products of arithmetical functions*, Acta Arithmetica 7 (1961), p. 29-38.

[4] И. М. Гельфанд, Д. А. Райков и Г. Е. Шилов, *Коммутативные нормированные кольца*, Москва 1960.

[5] E. Hewitt and H. S. Zuckerman, *The l_1-algebra of a commutative semigroup*, Transactions of the American Mathematical Society 83 (1956), p. 70-97.

[6] B. M. Wilson, *Proofs of some formulae enunciated by Ramanujan*, Proceedings of the London Mathematical Society, (2), 21 (1922), p. 235-255.

Reçu par la Rédaction le 5. 1. 1962

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. X 1963 FASC. 1

SUR UN PROBLÈME DE K. URBANIK CONCERNANT LA DIMENSION DE HAUSDORFF

PAR

J.-L. LIBOUBAN ET N. RIEU (MONTPELLIER)

Urbanik a posé le problème suivant (1):

Le semi-groupe additif engendré par un ensemble parfait situé sur la demi-droite $(0, \infty)$ et ayant une dimension de Hausdorff positive dans tout voisinage de 0 contient-il nécessairement toute la demi-droite?

La réponse est négative. J.-P. Kahane nous a indiqué le principe de la construction d'un exemple contraire et proposé de réaliser cette idée. *L'ensemble E que nous allons exhiber a pour dimension de Hausdorff le nombre 1 dans tout voisinage de l'origine et le semi-groupe additif qu'il engendre ne contient dans $[0, 1]$ qu'un ensemble de points de mesure de Lebesgue nulle.*

1. Construction de E et propriétés immédiates. E sera un ensemble linéaire formé par la réunion d'ensembles disjoints dont les segments supports ont pour extrémités gauches les points 2^{-j} et des longueurs très rapidement décroissantes

$$E = \{0\} \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big),$$

$$E_j = \Big\{2^{-j} + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k a_{j+k}, \quad \text{où} \quad \varepsilon_k = 0 \text{ ou } 1, \text{ ou} \ldots, \text{ ou } 2^k\Big\}$$

où les accolades désignent l'ensemble des points de la forme écrite, et où $\{a_n\}$ est une suite rapidement décroissante de nombres réels positifs qu'on déterminera.

Les segments supports de E_j et E_{j-1} $(j = 2, 3, \ldots)$ sont disjoints si et seulement si

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{j+k} < 2^{-j}. \tag{1}$$

(1) K. Urbanik, **P 322**, Colloquium Mathematicum 8 (1961), p. 139.

On a en effet dans le premier membre la longueur du support de E_j et dans le second la distance entre extrémités gauches de E_j et E_{j-1}. On supposera désormais l'inégalité (1) satisfaite, quel que soit j.

On construira E_j par étapes comme intersection dénombrable d'ensembles fermés emboîtés décroissants E_j^p $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ constitués chacun par une réunion finie d'intervalles fermés qu'on appellera les *intervalles blancs*.

Sur le segment support de E_j: $\left[2^{-j}, 2^{-j}+\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{j+k}\right]$, on construira à la 0-ième étape:

$$E_j^0 = \left[2^{-j}, 2^{-j}+\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{j+k}\right] \cup \left[2^{-j}+a_j, 2^{-j}+a_j+\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{j+k}\right],$$

et à la p-ième etape:

$$E_j^p = \bigcup_{\{\varepsilon_k\}} \left[2^{-j}+\sum_{k=0}^{p} \varepsilon_k a_{j+k}\; 2^{-j}+\sum_{k=0}^{p} \varepsilon_k a_{j+k}+\sum_{k=p+1}^{\infty} 2^k a_{j+k}\right].$$

Les crochets représentent les intervalles blancs. On passera de E_j^{p-1} à E_j^p en remplaçant chaque intervalle blanc B de E_j^{p-1} par 2^p+1 intervalles blancs contenus dans B.

En supposant les intervalles blancs de la $(p-1)$-ième étape disjoints, les intervalles de la p-ième étape le sont encore si et seulement si

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} 2^k a_{j+k} < a_{j+p}. \tag{2}$$

En effet, cette inégalité exprime que, pour deux intervalles blancs de la p-ième étape contenus dans un même B, l'extrémité droite du premier est strictement à gauche de l'extrémité gauche du second. On supposera désormais l'inégalité (2) satisfaite pour tout p et tout j.

PROPOSITION 1. *E_j est un ensemble parfait de translation* [2].

En effet, E_j est fermé comme intersection d'ensembles fermés; E_j est sans point isolé car a_{j+k} tend vers 0 quand k tend vers l'infini (condition (1)), E_j est donc un ensemble parfait; E_j est décomposable d'une infinité de manières en portions égales disjointes (condition (2)).

PROPOSITION 2. *E est un ensemble parfait.*

En effet, 0 n'est pas un point isolé car dans tout voisinage de 0 il y a des points de $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ et aucun point de cette réunion n'est isolé, E est donc sans point isolé.

[2] Pour la définition des ensembles de translation voir [2], Chapitre I.

E est fermé car, d'après la condition (1), tout point adhérent à $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, autre que 0, appartient à cette réunion.

2. Etude du semi-groupe additif engendré par E. Un point du semi-groupe additif $[E]$ engendré par E peut s'écrire sous une forme simple que nous allons établir.

PROPOSITION 3. *La somme directe de E_j par lui-même est contenue dans E_{j-1}:*

$$E_j+E_j \subset E_{j-1}, \quad j = 2, 3, \ldots$$

En effet, soit

$$x' \in E_j, \quad x' = 2^{-j}+\sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p' a_{j+p},$$

$$x'' \in E_j, \quad x'' = 2^{-j}+\sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p'' a_{j+p}.$$

Alors

$$x'+x'' = 2^{-(j-1)}+\sum_{p=0}^{\infty} (\varepsilon_p'+\varepsilon_p'') a_{j+p},$$

où $\varepsilon_p'+\varepsilon_p'' = 0$, ou 1, ou ..., ou 2^{p+1}.

Posons $\varepsilon_0 = 0$ et $\varepsilon_q = \varepsilon_p'+\varepsilon_p''$ avec $q = p+1$. On a bien $\varepsilon_q = 0$, ou 1, ou ..., ou 2^q; alors

$$x'+x'' = 2^{-(j-1)}+\sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon_q a_{(j-1)+q} \quad \text{et} \quad x'+x'' \in E_{j-1}.$$

PROPOSITION 4 (corollaire). *Toute combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de points de E_j est égale ou bien à une combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de points de E_{j-1}, ou bien à la somme d'un point de E et d'une telle combinaison linéaire.*

PROPOSITION 5. *Tout point de $[E]$, c'est-à-dire toute combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de points de E, a pour expression une somme du type*

$$\sum_{i=1}^{N} m_i x_1^i+\eta_2 x_2+\ldots+\eta_n x_n$$

avec $\eta_j = 0$ ou 1, $x_j \in E_j$, m_i entiers positifs, $x_1^i \in E_1$.

En effet, en notant $\sum_j$ une combinaison linéaire de points de $\bigcup_1^j E_i$, la proposition 4 entraîne:

$$\sum_n = \eta_n x_n + \sum_{n-1}, \qquad \sum_{n-1} = \eta_{n-1} x_{n-1} + \sum_{n-2} \quad \text{et} \quad \sum_2 = \eta_2 x_2 + \sum_1.$$

Alors $\sum_n = \sum_1 + \eta_2 x_2 + \ldots + \eta_n x_n$, c. q. f. d.

Remarque. Pour les points de l'ensemble $[E] \cap [0,1)$, que nous noterons $[E]^*$, la somme $\sum_1$ ne peut contenir qu'un terme car la somme de deux points de E_1 est supérieure à 1. Ainsi l'on a $x \in [E]^*$ si et seulement s'il existe un n, un $x_j \in E_j$ et un $\eta_j = 0$ ou 1 $(j = 1, 2, \ldots, n)$ tels que $x = \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \ldots + \eta_n x_n$.

3. Condition pour que la mesure de Lebesgue de $[E]^*$ soit nulle. On étudiera d'abord l'ensemble $[E]_n^* = \{\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \ldots + \eta_n x_n\}$. Pour $\eta_n = 0$ on a l'ensemble des points de $[E]_{n-1}^*$ donc

$$[E]_{n-1}^* \subset [E]_n^* \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} |[E]_n^*| = |[E]^*|,$$

où $|\ |$ désigne la mesure de Lebesgue.

On va maintenant majorer $|[E]_n^*|$ par le terme général d'une suite tendant vers 0. On désignera par $\binom{0}{2^n}$ un nombre entier compris entre 0 et 2^n (compris); écrit à différentes places ce symbole ne représentera pas nécessairement le même nombre.

Considérons un $x \in [E]_n^*$, soit $x = \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \ldots + \eta_n x_n$, et dressons le tableau

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2^{-1} + \binom{0}{1} a_1 + \binom{0}{2} a_2 + \ldots + \binom{0}{2^{n-1}} a_n + \binom{0}{2^n} a_{n+1} + \ldots,\\
x_2 &= 2^{-2} \qquad\quad + \binom{0}{1} a_2 + \ldots + \binom{0}{2^{n-2}} a_n + \binom{0}{2^{n-1}} a_{n+1} + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n &= 2^{-n} \qquad\qquad\qquad\qquad + \binom{0}{1} a_n \quad + \binom{0}{2} a_{n+1} + \ldots
\end{aligned}$$

Posons $x = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2$ avec:

$$\beta_0 = \eta_1 2^{-1} + \eta_2 2^{-2} + \ldots + \eta_n 2^{-n},$$

$$\beta_1 = \sum_{p=1}^{n} \left[\eta_p \binom{0}{1} + \eta_{p-1} \binom{0}{2} + \ldots + \eta_1 \binom{0}{2^{p-1}}\right] a_p,$$

$$\beta_2 = \sum_{p=1}^{\infty} \left[\eta_n \binom{0}{2^p} + \eta_{n-1} \binom{0}{2^{p+1}} + \ldots + \eta_1 \binom{0}{2^{n+p-1}}\right] a_{n+p}.$$

Pour majorer la mesure de $[E]_n^*$ on le recouvrera par la réunion des segments de longeur $\max\beta_2$ dont les extrémités gauches sont de la forme $\beta_0 + \beta_1$. Le nombre de ces segments est le nombre des valeurs prises par $\beta_0 + \beta_1$. Quand les η_j varient, le nombre des valeurs prises par β_0 est 2^n. Dans l'expression de β_1, le nombre de valeurs prises par le coefficient de a_p est 2^p (nombre d'entiers compris entre 0 et $1+2+\ldots+2^{p-1}$ inclus). Le nombre des valeurs prises par β_1 est donc $\prod_{p=1}^{n} 2^p = 2^{n(n+1)/2}$.

Il y a donc $2^{n+n(n+1)/2}$ segments dans le recouvrement. La longueur de ces segments est:

$$\max\beta_2 = \sum_{p=1}^{\infty} (2^p + 2^{p+1} + \ldots + 2^{p+n-1}) a_{n+p}$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} 2^p (2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{n-1}) a_{n+p} = (2^n - 1) \sum_{p=1}^{\infty} 2^p a_{n+p}.$$

D'après la condition (2), cette somme est inférieure à a_n et $\max\beta_2 < 2^n a_n$. On a donc

$$|[E]_n^*| < 2^{n+\frac{n(n+1)}{2}+n} a_n = 2^{n^2/2+5n/2} a_n.$$

Par conséquent:

Proposition 6. *Pour que $|[E]^*| = 0$, il suffit que*

$$\lim_{n\to\infty} (2^{n^2/2+5n/2} a_n) = 0. \tag{3}$$

4. Condition pour que la dimension de Hausdorff de E_j soit supérieure à un nombre t positif. On se servira de la caractérisation suivante, substanciellement due à Frostman [1] (voir aussi [2], chapitre II, théorème II).

La *dimension* $\dim_H$ *de Hausdorff* d'un ensemble fermé est la borne supérieure des valeurs de t telles qu'il existe une fonction f continue, croissante, constante sur les intervalles contigus à l'ensemble (composantes connexes de son complémentaire), de variation totale 1 ($f(-\infty) = 0$, $f(+\infty) = 1$) et Lipschitzienne d'ordre t.

On va chercher une condition portant sur la suite $\{a_n\}$ pour que la fonction de Lebesgue f construite sur E_j soit Lipschitzienne d'ordre t. On évalue le module de continuité $\omega_f(\delta)$ de f.

Pour tout δ, soit p tel que $b_{p+1} < \delta < b_p$, où b_p désigne la longueur des intervalles blancs de la p-ème étape de la construction de E_j. On a

$$\omega_f(\delta) = \sup_{|x-x'|\leqslant\delta} |f(x) - f(x')|.$$

Comme f est croissante on a

$$\omega_f(\delta) = \sup_{|x-x'|=\delta} |f(x) - f(x')|.$$

Or $|x-x'| = \delta$ entraîne que x et x' sont au plus dans deux intervalles blancs consécutifs ($|x-x'| \leqslant b_p$); on peut donc majorer la variation de f

entre x et x' par la variation sur deux intervalles blancs consécutifs, c'est-à-dire par le double de la variation de f sur un intervalle blanc, soit:

$$\frac{1}{(2^0+1)(2^1+1)\dots(2^p+1)},$$

où l'on a, au dénominateur, le nombre d'intervalles blancs de la p-ième étape, c'est-à-dire le nombre de valeurs prises par $\sum_{k=0}^{p}\varepsilon_k a_{j+k}$ quand les ε_k varient. En majorant cette variation par $2^{-p(p+1)/2}$ il vient

$$\omega_f(\delta) < 2\cdot 2^{-p(p+1)/2} = 2^{1-p(p+1)/2}.$$

D'autre part,

$$|x-x'| = \delta > b_{p+1} = \sum_{k=p+2}^{\infty} 2^k a_{j+k} > 2^{p+2} a_{j+p+2}.$$

On peut donc écrire (quel que soit $t>0$)

$$\omega_f(\delta) < 2^{1-p(p+1)/2}\frac{\delta^t}{2^{(p+2)t}a_{j+p+2}^t},$$

ce qui est une condition de Lipschitz d'ordre t si le coefficient de δ^t est majoré par une constante finie, par exemple par 2, quand p est assez grand.

PROPOSITION 7. *Pour avoir* $\dim_{\mathrm{H}} E_j \geqslant t$, *il suffit que*

$$2^{1-p(p+1)/2-(p+2)t}a_{j+p+2}^{-t} < 2$$

quand p est assez grand, ou en posant $j+p+2=n$, il suffit que

(4) $$2^{-(n-j-2)(n-j-1)/2-(n-j)t}a_n^{-t} < 1$$

quand n est assez grand.

5. Définition de la suite $\{a_n\}$. Choisissons

$$a_n = 2^{-n^2/2-3n}$$

et vérifions les conditions (1)-(4).

La condition (1) s'écrit

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k 2^{-(j+k)^2/2-3(j+k)} < 2^{-j}$$

et on peut majorer la série du premier membre par le double du premier terme

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{j+k} < 2\cdot 2^{-j^2/2-3j} < 2^{-j}.$$

La condition (2) s'écrit

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} 2^k 2^{-(j+k)^2/2-3(j+k)} < 2^{-(j+p)^2/2-3(j+p)}$$

et on peut majorer la série par le double du premier terme

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} 2^k a_{j+k} < 2\cdot 2^{p-1}2^{-(j+p+1)^2/2-3(j+p+1)} = 2^{2-[2(j+p)-1]/2-3}a_{j+p} < a_{j+p}.$$

La condition (3) s'écrit

$$\lim_{n\to\infty} 2^{n^2/2+5n/2}2^{-n^2/2-3n} = 0;$$

en effet, le premier membre est

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-n/2} = 0.$$

La condition (4) s'écrit

$$2^{-(n-j-2)(n-j-1)/2-(n-j)t}2^{t(n^2/2+3n)} < 1 \text{ pour } n \text{ assez grand},$$

ou bien

$$-\frac{(n-j-2)(n-j-1)}{2} - (n-j)t + t\left(\frac{n^2}{2}+3n\right) < 0 \text{ pour } n \text{ assez grand},$$

ou encore

$$t < \frac{1}{2}\,\frac{(n-j-2)(n-j-1)}{n^2/2+2n-j} \text{ pour } n \text{ assez grand},$$

où le second membre tend vers 1 quand n tend vers l'infini. La condition (4) est donc vérifiée pour tout t strictement inférieur à 1. Donc, pour tout j, on a

$$\dim_{\mathrm{H}} E_j = 1,$$

ce qui achève la démonstration.

TRAVAUX CITÉS

[1] O. Frostman, *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles*, Communications du Séminaire Mathématique de l'Université de Lund 3 (1935).

[2] J. P. Kahane et R. Salem, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, à paraître chez Herman.

Reçu par la Rédaction le 12. 2. 1962