En effet, on a d'après (16) et (18) $\delta_f(\varepsilon) < l/2$ pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, de sorte que, pour de tels ε, il n'y a entre x_ε et $x_\varepsilon + \delta_f(\varepsilon)$ tout au plus qu'un seul des points 0, (14) et ω_f. Il en résulte en vertu de 4^0 que $\langle x_\varepsilon, x_\varepsilon + \delta_f(\varepsilon)\rangle$ est contenu dans un intervalle de monotonie de $f(x)$ et cet intervalle de monotonie contient en vertu de (18) l'un au moins des points $x_\varepsilon + T(\varepsilon)$ et $x_\varepsilon + \delta_f(\varepsilon) - T(\varepsilon)$.

En supposant donc, contrairement à (17), que $\delta_f(\varepsilon) < T(\varepsilon)$ pour un $\varepsilon < \varepsilon_0$, on aurait en vertu du lemme 3^0, pour tout $p \varepsilon \langle \delta_f(\varepsilon), T(\varepsilon)\rangle$, l'une ou l'autre des formules:

$$(19) \quad \begin{aligned} &|f(x_\varepsilon) - f(x_\varepsilon + p)| \geqslant |f(x_\varepsilon) - f[x_\varepsilon + \delta_f(\varepsilon)]| = \varepsilon, \\ &|f[x_\varepsilon + \delta_f(\varepsilon)] - f[x_\varepsilon + \delta_f(\varepsilon) - p]| \geqslant |f[x_\varepsilon + \delta_f(\varepsilon)] - f(x_\varepsilon)| = \varepsilon. \end{aligned}$$

On en conclut d'après la définition de ε-presque-période que p n'en est pas une. Il en résulte en particulier que $T(\varepsilon)$ n'est pas une ε-presque-période de $f(x)$ (ce qui est d'ailleurs vrai pour tout $\varepsilon > 0$ si la fonction $f(x)$ est continue et périodique), mais aussi que $T(\varepsilon)$ n'est pas un point-limite à droite des ε-presque-périodes de cette fonction, contrairement à (15). On a donc (17), c. q. f. d.

ÉVALUATION DE LA DIFFÉRENCE ENTRE L'AIRE D'UNE RÉGION PLANE CONVEXE ET LE NOMBRE DES POINTS AUX COORDONNÉES ENTIÈRES COUVERTS PAR ELLE

PAR

M. NOSARZEWSKA (WROCŁAW)

1. En réponse à une question posée par H. Steinhaus, je vais démontrer que l'estimation de l'erreur commise au mesurage de l'aire plane par le nombre des points aux coordonnées entières qu'elle couvre, évaluée par V. Jarník [1]), peut être améliorée pour les régions *convexes* comme il suit [2]):

I étant une région plane convexe, a — son aire, l — la longueur de sa frontière et w — le nombre des points aux coordonnées entières couverts par I, on a

$$(1) \qquad -(\tfrac{1}{2}l+1) < a - w < \tfrac{1}{2}l.$$

Je vais montrer aussi que l'estimation (1) ne se laisse pas resserrer davantage (dans le domaine des fonctions linéaires de l).

2. Soit J la frontière de la région convexe I. On peut représenter les points p de la courbe J paramétriquement:

$$(2) \qquad p = p(t) \quad \text{où} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

de façon que $p(t') = p(t'')$ équivaille à $t' = 0$ et $t'' = 1$ (pour $t' < t''$). Faisons correspondre à chaque valeur du paramètre t une demi-droite d'appui au point $p(t)$ — l'une quelconque s'il y en a plus d'une — orientée dans le sens de t croissant; désignons-la par $D(t)$. Assignons à chaque angle entre $D(0)$ et $D(t)$, compté dans une direction fixe, sa mesure $\varphi(t)$ (longueur d'arc de rayon 1). Ainsi:

$$(3) \qquad \begin{gathered} 0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 2\pi \quad \text{et} \quad \varphi(1) = \varphi(0) + 2\pi, \\ t' < t'' \quad \text{entraîne} \quad \varphi(t') \leqslant \varphi(t''). \end{gathered}$$

[1]) Voir H. Steinhaus, *Sur un théorème de M. V. Jarník*, ce volume, p. 1-5.

[2]) Cf. ma communication du 18 avril 1947 à la Société Polonaise de Mathématique (Section de Wrocław), ce volume, p. 45.

Considérons — comme l'a fait M. Steinhaus dans son travail précité — les carrés ouverts (sans contour) de côté 1 et de centre aux coordonnées entières. Désignons-en par Q_k, où $k=1,2,\ldots,n$, tous ceux qui ont des points communs avec I et posons:

$$A_k = Q_k\cdot J, \qquad \Omega_k = Q_k\cdot I,$$
$$|A_k| = \text{longueur de } A_k, \qquad |\Omega_k| = \text{aire de } \Omega_k;$$

enfin, soit $w_k=1$ ou 0, suivant que Ω_k contient ou non le centre de Q_k. On a donc:

$$(4) \qquad l \geqslant \sum_{k=1}^{n} |A_k|, \qquad a = \sum_{k=1}^{n} |\Omega_k|, \qquad w = \sum_{k=1}^{n} w_k.$$

Il suffit d'envisager les valeurs de k pour lesquelles on a $Q_k\cdot J\neq 0$, car pour les autres on a manifestement $|\Omega_k|-w_k=0$.

Eliminons d'abord le cas où $n=1$, c'est-à-dire celui de la région I située entièrement dans un seul carré Q_1. On a dans ce cas $0<a<1$ et $w\leqslant 1$, d'où $a-w>-1$, de sorte que la première des inégalités (1) est triviale et la deuxième l'est aussi quand $w=1$, puisqu'on a alors $a-w<0$. Quand $w=0$, il existe une droite passant par le centre du carré sans couper I. Par conséquent, si $l>1$, on a $a-w=a\leqslant 1/2<l/2$, et si $l\leqslant 1$, il vient $a-w=a\leqslant l^2/4\pi<l^2/2\leqslant l/2$ en vertu du théorème isopérimétrique, de sorte que l'inégalité en question est encore satisfaite.

Il ne reste donc à envisager que le cas où $n\geqslant 2$.

Remarquons au préalable que A_k étant un arc quelconque (faisant partie d'une courbe convexe ou non convexe) dont les extrémités se trouvent sur deux côtés voisins de Q_k, et $|\Delta|$ désignant l'aire de la partie Δ de ce carré comprise entre eux et cet arc [3]),

$$(5) \qquad |A_k|\leqslant 1 \quad \text{entraîne} \quad |\Delta|<|A_k|/2.$$

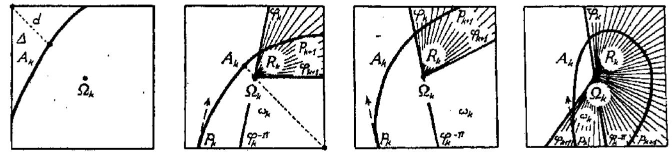
En effet, l'aire $|\Delta|$ ne dépasse pas — comme on sait — celle du quart de cercle délimité par l'arc de longueur $|A_k|$, de sorte que $|\Delta|\leqslant|A_k|^2/\pi<|A_k|^2/2\leqslant|A_k|/2$.

3. Pour établir la partie gauche de l'estimation (1), on peut se borner, en vertu de (4), aux k tels que $w_k=1$, car $w_k=0$ entraîne évidemment $|\Omega_k|-w_k=|\Omega_k|>0>-|A_k|/2$.

[3]) Cas (b) de M. Steinhaus, loco cit., p. 4.

Admettons d'abord que A_k se compose d'un seul arc. Quatre cas sont à considérer:

1° 2° 3° 4°



1° Les extrémités de A_k sont situées sur deux côtés voisins de Q_k dont le sommet commun est à la distance $d\leqslant 1/\sqrt{2}$ du point d'intersection de la diagonale passant par lui avec A_k. Le centre de Q_k étant dans la région (ouverte) Ω_k, puisque $w=1$, cette distance est donc nécessairement $d<1\sqrt{2}$.

Si $|A_k|\leqslant 1$, on a alors, en posant $\Delta=Q-\bar{\Omega}_k$ dans (5), $1-|\Omega_k|<|A_k|/2$.

Si $|A_k|>1$, on a encore $|\Omega_k|\geqslant 1/2$ par suite de convexité de I (puisque $\bar{I}$ contient dans le cas considéré le centre et les trois autres sommets de Q_k), et il vient $1-|\Omega_k|\leqslant 1/2<|A_k|/2$.

On a donc quoi qu'il en soit

$$(6) \qquad |\Omega_k|-w_k=|\Omega_k|-1>-|A_k|/2.$$

2° Les extrémités de A_k sont situées sur deux côtés voisins de Q_k, mais on a $d>1/\sqrt{2}$. Alors

$$(7) \qquad |A_k|\geqslant 1.$$

Soit $t_k\leqslant t\leqslant t_{k+1}$ le segment dont A_k est l'image donnée par la représentation paramétrique (2). Les points $p_k=p(t_k)$ et $p_{k+1}=p(t_{k+1})$ appartiennent donc au contour du carré et

$$t_k<t<t_{k+1} \quad \text{entraîne} \quad \varphi_k=\varphi(t_k)<\varphi(t)<\varphi(t_{k+1})=\varphi_{k+1}$$

en vertu de (3). Désignons par $|R_k|$ l'aire de la région R_k couverte par les rayons issus du centre de Q_k sous l'angle ϑ tel que $\varphi_k\leqslant\vartheta\leqslant\varphi_{k+1}$, et par $|\omega_k|$ l'aire de la région convexe ω_k comprise entre le contour de Q_k et les rayons d'angle $\varphi_k-\pi$ et φ_{k+1}. Il vient

$$(8) \qquad |\omega_k|=1/2-|R_k| \quad \text{et} \quad |\Omega_k|>|\omega_k|,$$

d'où $|\Omega_k|>1/2-|R_k|$ et par conséquent

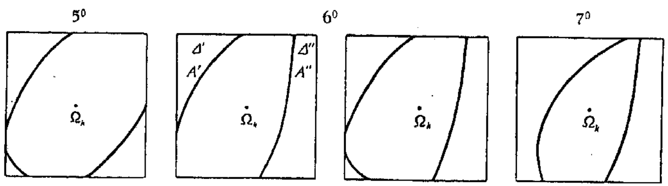
(9) $\qquad |\Omega_k| - m_k = |\Omega_k| - 1 > -1/2 - |R_k| \geqslant -|A_k|/2 - |R_k|$

en vertu de (7).

3⁰ Les extrémités de A_k sont situées sur les côtés opposés de Q_k. On a alors (7) et (8), ce qui entraîne (9) comme dans le cas précédent.

4⁰ Les extrémités de A_k sont situées sur le même côté de Q_k. On a encore (7); cependant il vient $|\omega_k| = |R_k| - 1/2$ au lieu de (8), mais en même temps $|\Omega_k| > -|\omega_k|$, de sorte que l'on a encore $|\Omega_k| > 1/2 - |R_k|$ et par conséquent (9).

Admettons à présent que A_k se compose de plus d'un arc. Alors, le cas dans lequel l'un d'eux aurait ses extrémités sur le même côté de Q_k (cas 4⁰) étant évidemment impossible par suite de la convexité de I, trois cas sont à envisager:



5⁰ Toutes les composantes de A_k tombent sous le cas 1⁰.

Alors $Q_k - \bar{\Omega}_k$ se compose d'autant de régions auxquelles on peut appliquer le raisonnement employé pour 1⁰ et obtenir (6) par addition.

6⁰ Il n'y a qu'une ou deux composantes de A_k qui tombent sous le cas 1⁰.

S'il n'y en a qu'une, A_k ne peut avoir que deux composantes dont l'autre tombe sous le cas 2⁰ ou 3⁰. Soit A' la première et A'' la seconde. Q_k se décompose alors en trois régions:

$$Q_k = \Delta' + \Omega_k + \Delta''.$$

En désignant respectivement par ω'' et R'' les régions formées pour A'' comme celles pour A_k dans les cas 2⁰ et 3⁰, il vient

$$|\Omega_k| - m_k = |\Omega_k| - 1 > |\omega''| - 1 - |\Delta'| >$$
$$> -|A''|/2 - |R''| - |A'|/2 = -|A_k|/2 - |R''|,$$

d'où la formule (9) comme dans les cas 2⁰ et 3⁰.

S'il y a deux composantes de A_k qui sont situées comme dans le cas 1⁰, A_k se compose de trois composantes dont la troisième tombe nécessairement sous le cas 3⁰ et le raisonnement tout à fait analogue conduit à la même inégalité.

7⁰ Aucune composante de A_k n'est située comme dans le cas 1⁰.

Alors A_k n'a nécessairement que deux composantes et elles tombent sous le cas 3⁰. Comme la longueur de chacune d'elle est au moins égale à 1, on a $|A_k| \geqslant 2$, d'où

$$|\Omega_k| - m_k = |\Omega_k| - 1 > -1 \geqslant -|A_k|/2,$$

c'est-à-dire la formule (6).

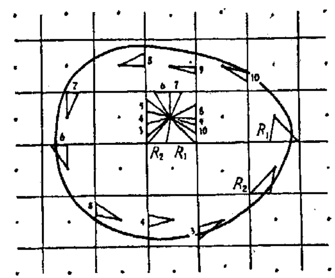
Il est ainsi établi que k satisfait à (6) ou à (9) dans tous les cas possibles, ce qui entraîne en vertu de (4)

(10) $\qquad a - m = \sum_{k=1}^{n} (|\Omega_k| - m_k) > -\sum_{k=1}^{n} |A_k|/2 - \sum_{k=1}^{n} |R_k| \geqslant -l/2 - \sum_{k=1}^{n} |R_k|,$

en posant $|R_k| = 0$ pour tous les k pour lesquels c'est la formule (6) qui se présente.

Reste à montrer que

(11) $\qquad \sum_{k=1}^{n} |R_k| \leqslant 1.$



Déplaçons toutes les régions R_k par translation de manière que leurs sommets (centres des carrés Q_k où elles se trouvaient) viennent se placer dans un point aux coordonnées entières. Elles se trouveront donc contenues dans un carré Q. Comme les rayons qui délimitent R_k forment avec la demi-droite d'appui au point $p(0)$ les angles $\varphi(t_k)$ et $\varphi(t_{k+1})$, et la fonction $\varphi(t)$ étant croissante d'après (3), les régions R_k ne peuvent pas empiéter les unes sur les autres. La somme de leurs aires ne dépasse donc pas l'aire de Q, d'où la formule (11), c. q. f. d.

4. Pour établir la partie droite de l'estimation (1), il suffit en vertu de (4) de montrer que:

$$\left.\begin{array}{lll} (12) & |\Omega_k| - m_k \leqslant |A_k|/2 & \text{pour tout} \\ (13) & |\Omega_k| - m_k < |A_k|/2 & \text{au moins pour un} \end{array}\right\} k = 1, 2, \ldots, n.$$

Si $w_k=1$, l'inégalité (13) est triviale. Admettons donc que $w_k=0$.

Soit d'abord A_k composé d'un seul arc. La région Ω_k étant convexe et ne contenant pas le centre du carré, il existe une droite passant par ce centre et telle que Ω_k se trouve contenue dans l'une des moitiés en lesquelles cette droite coupe le carré. On a par conséquent $|\Omega_k|\leqslant 1/2$.

Si $|A_k|>1$, on a donc (13). Si, par contre, $|A_k|\leqslant 1$, deux cas sont à considérer:

8° $|\Omega_k|<1/2$. On a alors l'inégalité (13) qui résulte: pour A_k aux extrémités sur l'un des côtés de Q_k [4]) — de l'hypothèse $|A_k|\leqslant 1$, en vertu de laquelle Ω_k se trouve nécessairement comprise entre ce côté et la droite parallèle à lui passant par le centre du carré; pour A_k aux extrémités sur deux côtés voisins de Q_k — de (5), et pour A_k aux extrémités sur les côtés opposés de Q_k, donc pour $|A_k|\geqslant 1$ — de l'hypothèse $|A_k|\leqslant 1$ qui devient alors $|A_k|=1$.

9° $|\Omega_k|=1/2$. Comme région convexe privée de centre du carré Q_k qui la contient, Ω_k en remplit alors une moitié, de sorte que A_k est parallèle à un côté de Q_k, d'où $|A_k|=1$, et par conséquent $|\Omega_k|=|A_k|/2$. C'est donc (12) qui se présente, mais la courbe J ne peut se composer exclusivement d'arcs A_k de ce genre, puisqu'elle est une courbe fermée.

5. Pour montrer que l'estimation (1) ne se laisse préciser davantage par aucune amélioration des constantes qui y figurent, je vais définir deux exemples des suites $\{I_n\}$ de régions convexes pour lesquelles les différences

$$\gamma_n=(a_n-w_n)-(-{}^1\!/_2 l_n-1),\qquad \delta_n={}^1\!/_2 l_n-(a_n-w_n)$$

tendent respectivement vers 0.

Considérons d'abord la suite de carrés I_n aux sommets opposés $(-1/n,\ -1/n)$ et $(m+1/n,\ m+1/n)$ où $n=1,2,\ldots,$ le nombre m étant un entier fixe non négatif. On a pour tout $m=0,1,2,\ldots$

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_n=\lim_{n\to\infty}{}^4\!/_n(m+{}^1\!/_n+1)=0,$$

ce qui montre que parmi les longueurs l pour lesquelles l'inégalité gauche de (1) est la plus précise, il existe qui sont arbitrairement petites et qui sont arbitrairement élevées.

Considérons à présent la suite de carrés I_n de côtés $1/n$ et qui ne couvrent aucun point aux coordonnées entières. Alors

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n=\lim_{n\to\infty}({}^2\!/_n-{}^1\!/_{n^2})=0,$$

ce qui montre que l'inégalité droite de (1) est la plus précise, puisque'lle l'est pour les longueurs l indéfiniment petites.

6. La question se pose donc s'il en est autrement du moins pour les longueurs l suffisamment élevées:

P52. Existe-t-il une constante ν telle que $a-w<l/2-\nu$ pour tout l dépassant un certain l_0? En particulier, en est-il ainsi pour $l_0=\pi$ [5])?

Il est facile de montrer (en arrondissant les angles dans le premier des exemples envisagés et faisant croître m à l'infini) que la constante ν ne saurait, en tout cas, dépasser $\pi/4$.

[4]) Cas (a) de M. Steinhaus, loco cit., p. 4.

[5]) Cf. à ce propos l'estimation de $a-w$ établie par M. Warmus pour les régions I arbitraires, ce volume, p. 46.