where $y \epsilon E$, and g is a Lebesgue-integrable function. Thus it is also the general form of linear functionals in G. The integration by parts gives

$$F(y) = (D)\int_a^b y'(t)[\dot{g}(b) - \dot{g}(t)]\,dt,$$

where $\dot{g}(t) = \int_a^t g(t)\,dt$ is an absolutely continuous function.

Let (D) be the space of Denjoy-integrable functions in $\langle a, b\rangle$ with the usual definition of addition. A sequence $\{x_n\}$ of elements of (D) will be called *convergent to* x if the sequence $\left\{(D)\int_a^t x_n(t)\,dt\right\}$ is uniformly bounded and asymptotically convergent to x. Then we obtain the following theorem:

The general form of linear functionals in (D) *is*

$$F(x) = (D)\int_a^b x(t)\,h(t)\,dt,$$

where $h(t)$ *is any absolutely continuous function vanishing at* b.

SUR LES PRESQUE-PÉRIODES DES FONCTIONS PÉRIODIQUES

PAR

S. HARTMAN, H. STEINHAUS ET H. FAST (WROCŁAW)

I. Le problème (S. Hartman). Désignons par $\delta_f(\varepsilon)$ le *ε-module de continuité uniforme* de la fonction $f(x)$ uniformément continue, c'est-à-dire la borne supérieure des nombres $\delta > 0$ pour lesquels

$$|x' - x''| < \delta \quad \text{entraîne} \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Appelons *ε-presque-période* d'une fonction continue $f(x)$ — et désignons par $\tau_f(\varepsilon)$ — tout nombre pour lequel on a

$$|f[x + \tau_f(\varepsilon)] - f(x)| < \varepsilon$$

quel que soit x.

Les fonctions $f(x)$ sont supposées définies pour tout x réel.

La notion de presque-période est étudiée d'habitude pour les fonctions presque périodiques, mais elle se montre utile dans l'étude des fonctions périodiques, où elle permet, par exemple, de simplifier les démonstrations de certains théorèmes. Tel est, entre autres, le théorème suivant de Gottschalk [1]):

Quels que soient les nombres réels t, $a_1, \dots, a_k$ non nuls et δ positif, il existe un ensemble relativement dense [2]) N de nombres entiers tel que $n \epsilon N$ entraîne l'existence des entiers $m_1, \dots, m_k$ pour lesquels on a

(1) $$|nt - m_i a_i| < \delta \qquad (i = 1, \dots, k).$$

Faisons d'abord deux remarques qui trouveront leur application aussi dans la partie III de ce travail.

Soit $f(x)$ une fonction non-constante, périodique et continue. Désignons par ω_f sa *période minimum*, c'est-à-dire la plus petite période positive.

---

[1]) W. H. Gottschalk, *Almost-periodicity, Equi-continuity and Total-boundedness*, Bulletin of the American Mathematical Society 52 (1946), p. 633-636.

[2]) c'est-à-dire que l'ensemble des différences entre ses éléments voisins est borné.

Alors:

1° Si a est un $\tau_f(\varepsilon)$, il en est de même de $(-a)$ et de $b=a+n\omega_f$ où n est un entier arbitraire.

On peut donc se borner à considérer les ε-presque-périodes qui appartiennent au segment $\langle 0, \omega_f/2\rangle$.

2° Pour tout $\delta>0$, il existe un $\varepsilon_0>0$ tel qu'à tout $\tau_f(\varepsilon)$ où $\varepsilon<\varepsilon_0$ correspond un entier n pour lequel on a $|\tau_f(\varepsilon)-n\omega_f|<\delta$.

C'est une conséquence immédiate de 1° et de la continuité de $f(x)$, qui implique que, pour toute suite $\{\tau_f(\varepsilon_k)\}$ où $0\leqslant\tau_f(\varepsilon_k)\leqslant\omega_f/2$ et $\varepsilon_k\to 0$, on a $\lim\limits_{k\to\infty}\tau_f(\varepsilon_k)=\tau_f(0)=0$.

Ceci établi, on peut démontrer le théorème de Gottschalk comme il suit.

Considérons les fonctions

$$(2)\qquad f_0(x)=\sin\frac{2\pi}{t}x \qquad \text{et} \qquad f_i(x)=\sin\frac{2\pi}{a_i}x \qquad (i=1,\ldots,k).$$

Il existe en vertu de 2° un $\varepsilon>0$ suffisamment petit pour qu'à tout système de nombres $\tau_{f_0}(\varepsilon),\ldots,\tau_{f_k}(\varepsilon)$ vienne correspondre un système d'entiers $n, m_1,\ldots,m_k$ tels que l'on ait simultanément

$$(3)\qquad |\tau_{f_0}(\varepsilon)-nt|<\delta/2 \qquad \text{et} \qquad |\tau_{f_i}(\varepsilon)-m_ia_i|<\delta/2 \quad (i=1,\ldots,k).$$

Fixons un tel ε. On sait [3]) que, pour tout $\varepsilon>0$, les nombres $\tau(\varepsilon)$ qui sont des ε-presque-périodes des fonctions (3) simultanément constituent un ensemble relativement dense. En vertu de (3), on a pour ε fixé

$$(4)\qquad |\tau(\varepsilon)-nt|<\delta/2 \qquad \text{et} \qquad |\tau(\varepsilon)-m_ia_i|<\delta/2 \quad (i=1,\ldots,k),$$

ce qui entraîne (1).

Soit N l'ensemble de tous les n satisfaisant à (4), donc à (1). L'ensemble des $\tau(\varepsilon)$ étant relativement dense, N l'est également, ce qui achève la démonstration.

Un autre exemple d'application de la notion de presque-période d'une fonction périodique est fourni par le travail de Kaluza jr [4]), qui s'est servi de cette notion pour établir un théorème sur les fonctions presque-périodiques quelconques.

---

[3]) H. Bohr, *Fastperiodische Funktionen*, Berlin 1932, p. 31-32.

[4]) T. Kaluza jr, *Untersuchung fastperiodischer Funktionen mittels äquidistanter Zahlenmengen*, Journal für reine und angewandte Mathematik 181 (1939), p. 153-176, en particulier p. 157.

Il est évident que toute fonction $f(x)$ continue périodique est uniformément continue sur toute la droite. Une telle fonction admet des ε-presque-périodes pour tout $\varepsilon>0$, car tout nombre $n\omega_f$, où n est un entier, est une période de $f(x)$ et en même temps un $\tau_f(\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon>0$.

Cependant, les périodes $n\omega_f$ de $f(x)$ n'épuisent l'ensemble des $\tau_f(\varepsilon)$ pour aucun ε donné: en effet, tout nombre τ satisfaisant à l'inégalité $|\tau-n\omega_f|<\delta_f(\varepsilon)$ pour une valeur entière de n est un $\tau_f(\varepsilon)$. D'autre part, on conclut de la définition de $\delta_f(\varepsilon)$ que tout intervalle ouvert $(n\omega_f-\eta,\ n\omega_f+\eta)$, où $\eta>\delta_f(\varepsilon)$ et où n est un entier, contient des nombres qui ne sont pas des $\tau_f(\varepsilon)$. On est ainsi amené à introduire les définitions suivantes pour les fonctions continues périodiques $f(x)$.

Soit $\varepsilon>0$. Une ε-presque-période $\tau_f(\varepsilon)$ s'appellera *non-singulière* s'il existe un entier n tel que

$$n\omega_f-\delta_f(\varepsilon)<\tau_f(\varepsilon)<n\omega_f+\delta_f(\varepsilon);$$

sinon, elle sera dite ε-presque-période *singulière* de $f(x)$.

Une fonction continue périodique $f(x)$ s'appellera *non-singulière* s'il existe un $\varepsilon_0>0$ tel que chaque $\tau_f(\varepsilon)$ est pour tout $\varepsilon<\varepsilon_0$ une ε-presque-période non-singulière de cette fonction; sinon, la fonction s'appellera *singulière*.

On prouve aisément l'existence des fonctions admettant des ε-presque-périodes singulières pour un $\varepsilon>0$ donné. Telle est par exemple la fonction

$$(5)\qquad f(x)=\begin{cases}\cos\eta & \text{si } 8(n+1)\pi/2-\eta<x<8(n+1)\pi/2+\eta,\\ \sin x & \text{ailleurs},\end{cases}$$

n étant un entier arbitraire et η un nombre fixe quelconque entre 0 et $\pi/2$. Choisissons un ε entre $1-\cos\eta$ et 1. On voit aussitôt que $\omega_f=4\pi$ et $\delta_f(\varepsilon)<\pi/2$. Cependant, le nombre 2π est aussi un $\tau_f(\varepsilon)$, donc une ε-presque-période singulière de la fonction (5).

Néanmoins, la fonction (5) est une fonction périodique non-singulière en posant $\varepsilon_0=1-\cos\eta$. Parmi les autres fonctions périodiques non-singulières, citons encore $\sin\lambda x$ (pour λ réel arbitraire), où l'on peut admettre même $\varepsilon_0=+\infty$.

Le problème se pose donc: *y a-t-il des fonctions continues périodiques singulières?*

II. Un exemple (H. Steinhaus). *La réponse au problème qui précède est affirmative.*

Divisons l'intervalle semi-ouvert $\langle 0,1)$ en une suite d'intervalles partiels sans points communs

$$I_0',\ I_1,\ I_1',\ I_2,\ I_2',\ \ldots \tag{6}$$

dont les I_k' sont fermés et les I_k — ouverts; il recouvrent $\langle 0,1)$ en se succédant sur l'axe des x dans l'ordre indiqué par (6). La longueur de I_0' est $7/11$; la longueur de I_k est $2h_k$ et celle de I_k' est la même. $(k=1,2,\ldots)$. En désignant la longueur par $|\ |$, on aura donc

$$|I_0'|+\sum_{k=1}^{\infty}(|I_k|+|I_k'|)=7/11+4\sum_{k=1}^{\infty}h_k=1$$

pour h_k convenablement choisi. On peut poser par exemple $h_k=1/12^k$; c'est ce que nous allons faire.

Désignons par a_k le milieu de I_k; soit

$$\varepsilon_k=(3/5)^k. \tag{7}$$

Définissons la fonction $f(x)$ comme suit:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{pour } x\,\epsilon\, I_k' \quad (k=0,1,\ldots), & (8)\\ \varepsilon_k\sin[\pi(x-a_k)/h_k] & \text{pour } x\,\epsilon\, I_k \quad (k=1,2,\ldots), & (9)\end{cases}$$

$$f(x+1)=f(x) \qquad \text{pour tous les } x. \tag{10}$$

(8) et (10) impliquent $f(1)=0$. Comme $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k=0$ d'après (7), on a continuité à gauche pour $x=1$; la continuité à l'intérieur de $\langle 0,1\rangle$ est évidente, car $\sin[\pi(x-a_k)/h_k]=0$ pour $x=a_k\pm h_k$.

On a pour $k=1,2,\ldots$ les relations:

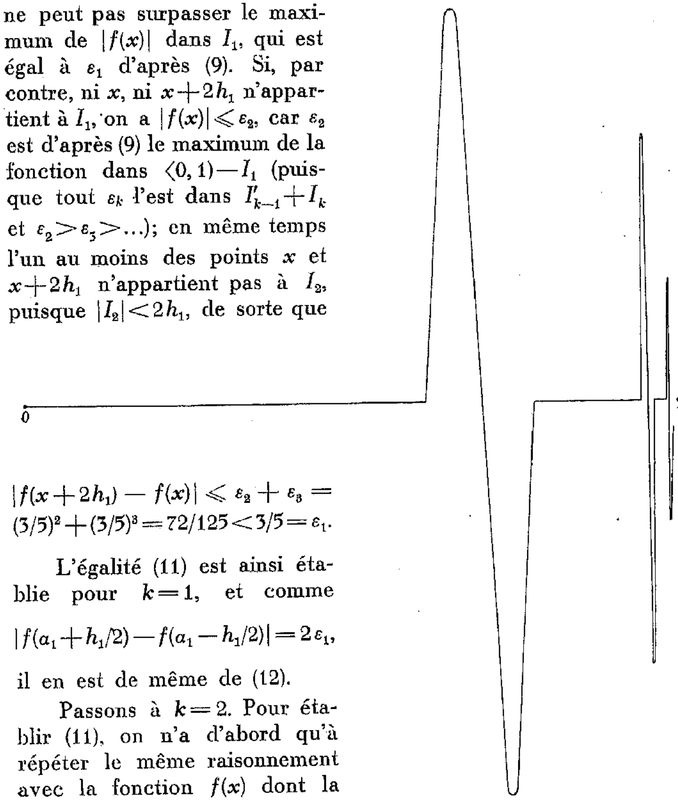
$$\operatorname*{Max}_{-\infty<x<+\infty}|f(x+2h_k)-f(x)|=\varepsilon_k, \tag{11}$$

$$\operatorname*{Max}_{-\infty<x<+\infty}|f(x+h_k)-f(x)|\geqslant 2\varepsilon_k, \tag{12}$$

qui se démontrent par induction comme suit.

Soit d'abord $x=a_1+h_1/2$; on a alors $x+2h_1=a_1+5h_1/2$, de sorte que $f(x)=\varepsilon_1$ d'après (9) et $f(x+2h_1)=0$ d'après (8), car $x+2h_1\,\epsilon\, I_1'$; en conséquence $|f(x+2h_1)-f(x)|=\varepsilon_1$ pour cette valeur de x.

Considérons les autres x. Si l'un des points x et $x+2h_1$ appartient à I_1, l'autre appartient nécessairement à I_0' ou à I_1', et comme la fonction s'annule dans ces intervalles d'après (8), la différence $|f(x+2h_1)-f(x)|$ ne peut pas surpasser le maximum de $|f(x)|$ dans I_1, qui est égal à ε_1 d'après (9). Si, par contre, ni x, ni $x+2h_1$ n'appartient à I_1, on a $|f(x)|\leqslant\varepsilon_2$, car ε_2 est d'après (9) le maximum de la fonction dans $\langle 0,1)-I_1$ (puisque tout ε_k l'est dans $I_{k-1}'+I_k$ et $\varepsilon_2>\varepsilon_3>\ldots$); en même temps l'un au moins des points x et $x+2h_1$ n'appartient pas à I_2, puisque $|I_2|<2h_1$, de sorte que



$|f(x+2h_1)-f(x)|\leqslant\varepsilon_2+\varepsilon_3=(3/5)^2+(3/5)^3=72/125<3/5=\varepsilon_1$.

L'égalité (11) est ainsi établie pour $k=1$, et comme

$$|f(a_1+h_1/2)-f(a_1-h_1/2)|=2\varepsilon_1,$$

il en est de même de (12).

Passons à $k=2$. Pour établir (11), on n'a d'abord qu'à répéter le même raisonnement avec la fonction $f(x)$ dont la partie sinusoïdale dans I_1 est imaginée supprimée en posant $f(x)=0$ pour $x\,\epsilon\, I_1$ dans la définition; mais pour compléter la démonstration, il restera à examiner l'expression $|f(x+2h_2)-f(x)|$ pour la fonction primitive dans le cas où soit l'un des points x

et $x+2h_2$, soit les deux appartiennent à I_1; or, le maximum de cette expression est atteint pour $x=a_1-h_2$ et $x+2h_2=a_1+h_2$, et il est égal d'après (9) à $2\varepsilon_1 \sin(\pi h_2/h_1)=2\varepsilon_1 \sin(\pi/12)<\varepsilon_1 \pi/6<$ $<0{,}36=\varepsilon_2$, ce qui achève la démonstration de (11) pour $k=2$. Comme $|f(a_2+h_2/2)-f(a_2-h_2/2)|=2\varepsilon_2$, il en est de même de (12).

Pour passer à k naturel quelconque, remarquons que (12) résulte immédiatement de la définition de $f(x)$ et que (11) n'exige, pour tout $k=2,3,\ldots$, que l'étude de $f(x)$ dans I_k et I_{k-1}; en effet, les maxima dans $I_{k+1}, I_{k+2}, \ldots$ sont plus petits que dans I_k et les sinusoïdes dans $I_{k-2},\ldots,I_1$ sont plus aplaties que dans I_{k-1}, donc sans influence sur le maximum (11). Ainsi, la démonstration pour $k=1$ et $k=2$ contient tout ce qu'il faut pour établir les relations (11) et (12) en toute généralité.

Ceci fait, posons $\varepsilon_k^*=3\varepsilon_k/2$. Il résulte de (11) que $2h_k$ est un $\tau_f(\varepsilon_k^*)$, et de (12) que $\delta_f(\varepsilon_k^*)<h_k$; ainsi, $2h_k$ est une ε_k^*-presque-période singulière de $f(x)$. Enfin, comme $\varepsilon_k^*\to 0$, la fonction continue $f(x)$, qui est périodique d'après (10), est bien une fonction périodique singulière au sens de la définition de M. Hartman.

III. Un théorème (H. Fast). On peut chercher à établir des simples conditions suffisantes pour qu'une fonction continue périodique $f(x)$ soit non-singulière. Je vais démontrer le théorème suivant:

Si l'intervalle $\langle 0,\omega_f\rangle$ se décompose en un nombre fini de sous-intervalles dans lesquels la fonction $f(x)$ est monotone, elle est non-singulière.

La démonstration sera basée sur ce lemme:

3° $f(x)$ étant une fonction continue périodique, la fonction $|f[x+\delta_f(\varepsilon)]-f(x)|$, considérée pour un $\varepsilon>0$ fixé arbitrairement, atteint son maximum en un point $x_\varepsilon \in \langle 0,\omega_f\rangle$ et on a

$$|f[x_\varepsilon+\delta_f(\varepsilon)]-f(x_\varepsilon)|=\varepsilon. \tag{13}$$

Evidemment, il ne s'agit que d'établir la partie (13) de la thèse. Elle est trivialement vraie avec $\leqslant$ au lieu de $=$. Reste à exclure $<$. Or, en supposant ce signe admissible, on aurait $|f[x+\delta_f(\varepsilon)]-f(x)|<\varepsilon'$ pour un $\varepsilon'<\varepsilon$ quel que soit x, et comme les inégalités

$$x+\delta_f(\varepsilon)<x'<x+\delta_f(\varepsilon)+\delta_f(\varepsilon-\varepsilon'),$$
$$x-\delta_f(\varepsilon)-\delta_f(\varepsilon-\varepsilon')<x'<x-\delta_f(\varepsilon)$$

entraînent respectivement les inégalités

$$|f(x')-f[x+\delta_f(\varepsilon)]|<\varepsilon-\varepsilon',$$
$$|f(x')-f[x-\delta_f(\varepsilon)]|<\varepsilon-\varepsilon',$$

tous les x_1 et x_2 tels que $|x_1-x_2|<\delta_f(\varepsilon)+\delta_f(\varepsilon-\varepsilon')$ satisferaient à l'inégalité $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$, contrairement à la définition du ε-module de continuité uniforme (voir I, p. 297). Ainsi, 3° se trouve démontré.

Il en résulte immédiatement d'après la définition de $\delta_f(\varepsilon)$ que

4° Pour tout x' situé entre x_ε et $x_\varepsilon+\delta_f(\varepsilon)$, la valeur $f(x')$ est comprise entre $f(x_\varepsilon)$ et $f[x_\varepsilon+\delta_f(\varepsilon)]$.

Ceci établi, reprenons la démonstration du théorème. Fixons n points

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \tag{14}$$

de manière que la fonction $f(x)$ soit monotone dans les intervalles $\langle 0,a_1\rangle$, $\langle a_1,a_2\rangle$, ..., $\langle a_n,\omega_f\rangle$.

Soit l la longueur du plus court de ces intervalles.

En vertu de la remarque 1° (voir I, p. 298), il suffit de considérer les ε-presque-périodes non-négatives ne dépassant pas $\omega_f/2$.

Soit

$$T(\varepsilon)=\sup_{0\leqslant\tau_f(\varepsilon)\leqslant\omega_f/2}\tau(\varepsilon), \tag{15}$$

d'où

$$\delta_f(\varepsilon)\leqslant T(\varepsilon) \quad \text{pour tout } \varepsilon. \tag{16}$$

Conformément à la définition des fonctions périodiques non-singulières (voir I, p. 299), il s'agit donc d'établir l'existence d'un $\varepsilon_0>0$ tel que l'on ait

$$\delta_f(\varepsilon)\geqslant T(\varepsilon) \quad \text{pour tout} \quad \varepsilon<\varepsilon_0. \tag{17}$$

En vertu de la remarque 2° (voir I, p. 298), il existe un ε_0 tel que

$$T(\varepsilon)<l/2 \quad \text{pour tout} \quad \varepsilon<\varepsilon_0. \tag{18}$$

Il suffit de montrer que cet ε_0 satisfait à (17).

En effet, on a d'après (16) et (18) $\delta_f(\varepsilon) < l/2$ pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, de sorte que, pour de tels ε, il n'y a entre x_ε et $x_\varepsilon + \delta_f(\varepsilon)$ tout au plus qu'un seul des points 0, (14) et ω_f. Il en résulte en vertu de 4^0 que $\langle x_\varepsilon, x_\varepsilon + \delta_f(\varepsilon)\rangle$ est contenu dans un intervalle de monotonie de $f(x)$ et cet intervalle de monotonie contient en vertu de (18) l'un au moins des points $x_\varepsilon + T(\varepsilon)$ et $x_\varepsilon + \delta_f(\varepsilon) - T(\varepsilon)$.

En supposant donc, contrairement à (17), que $\delta_f(\varepsilon) < T(\varepsilon)$ pour un $\varepsilon < \varepsilon_0$, on aurait en vertu du lemme 3^0, pour tout $p \varepsilon \langle \delta_f(\varepsilon), T(\varepsilon)\rangle$, l'une ou l'autre des formules:

$$(19) \qquad \begin{gathered} |f(x_\varepsilon) - f(x_\varepsilon + p)| \geqslant |f(x_\varepsilon) - f[x_\varepsilon + \delta_f(\varepsilon)]| = \varepsilon, \\ |f[x_\varepsilon + \delta_f(\varepsilon)] - f[x_\varepsilon + \delta_f(\varepsilon) - p]| \geqslant |f[x_\varepsilon + \delta_f(\varepsilon)] - f(x_\varepsilon)| = \varepsilon. \end{gathered}$$

On en conclut d'après la définition de ε-presque-période que p n'en est pas une. Il en résulte en particulier que $T(\varepsilon)$ n'est pas une ε-presque-période de $f(x)$ (ce qui est d'ailleurs vrai pour tout $\varepsilon > 0$ si la fonction $f(x)$ est continue et périodique), mais aussi que $T(\varepsilon)$ n'est pas un point-limite à droite des ε-presque-périodes de cette fonction, contrairement à (15). On a donc (17), c. q. f. d.

ÉVALUATION DE LA DIFFÉRENCE ENTRE L'AIRE D'UNE RÉGION PLANE CONVEXE ET LE NOMBRE DES POINTS AUX COORDONNÉES ENTIÈRES COUVERTS PAR ELLE

PAR

M. NOSARZEWSKA (WROCŁAW)

1. En réponse à une question posée par H. Steinhaus, je vais démontrer que l'estimation de l'erreur commise au mesurage de l'aire plane par le nombre des points aux coordonnées entières qu'elle couvre, évaluée par V. Jarník [1]), peut être améliorée pour les régions *convexes* comme il suit [2]):

I étant une région plane convexe, a — son aire, l — la longueur de sa frontière et w — le nombre des points aux coordonnées entières couverts par I, on a

$$(1) \qquad -(\tfrac{1}{2}l + 1) < a - w < \tfrac{1}{2}l.$$

Je vais montrer aussi que l'estimation (1) ne se laisse pas resserrer davantage (dans le domaine des fonctions linéaires de l).

2. Soit J la frontière de la région convexe I. On peut représenter les points p de la courbe J paramétriquement:

$$(2) \qquad p = p(t) \quad \text{où} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

de façon que $p(t') = p(t'')$ équivaille à $t' = 0$ et $t'' = 1$ (pour $t' < t''$). Faisons correspondre à chaque valeur du paramètre t une demi-droite d'appui au point $p(t)$ — l'une quelconque s'il y en a plus d'une — orientée dans le sens de t croissant; désignons-la par $D(t)$. Assignons à chaque angle entre $D(0)$ et $D(t)$, compté dans une direction fixe, sa mesure $\varphi(t)$ (longueur d'arc de rayon 1). Ainsi:

$$(3) \qquad \begin{gathered} 0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 2\pi \quad \text{et} \quad \varphi(1) = \varphi(0) + 2\pi, \\ t' < t'' \quad \text{entraîne} \quad \varphi(t') \leqslant \varphi(t''). \end{gathered}$$

---

[1]) Voir H. Steinhaus, *Sur un théorème de M. V. Jarník*, ce volume, p. 1-5.

[2]) Cf. ma communication du 18 avril 1947 à la Société Polonaise de Mathématique (Section de Wrocław), ce volume, p. 45.