ZAM. 509. — DRUKARNIA UNIWERSYTETU I POLITECHNIKI WE WROCŁAWIU — F. 19634

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. I WROCŁAW 1948 FASC. 4

C O M M U N I C A T I O N S

UNE MÉTHODE DE PROLONGEMENT DES ENSEMBLES RELATIVEMENT FERMÉS OU OUVERTS

PAR

C. KURATOWSKI (VARSOVIE)

Soit $\mathcal{1}$ un espace métrique. Un sous-ensemble X d'un ensemble E situé dans l'espace $\mathcal{1}$ est dit *relativement fermé dans* E lorsque $X=E\cdot\overline{X}$, c'est-à-dire que X contient tous ses points d'accumulation qui appartiennent à E. L'ensemble X est dit *relativement ouvert dans* E lorsque $E-X$ est relativement fermé dans E.

Un ensemble fermé F s'appellera *prolongement fermé de* X lorsqu'il satisfait à la condition

$$X=E\cdot F. \tag{1}$$

De même, un ensemble ouvert G s'appellera *prolongement ouvert de* X lorsque

$$X=E\cdot G. \tag{2}$$

Bien entendu, si X est relativement fermé dans E, l'ensemble $\overline{X}$ en est un prolongement fermé. En général, un ensemble relativement fermé admet une infinité de prolongements fermés différents.

Dans cette communication [1]), je vais analyser de plus près une méthode de prolongement fermé ainsi que celle — correspondante par dualité — de prolongement ouvert, qui me paraît fort avantageuse. Elle permettra d'établir des théorèmes généraux dont on connaît quelques cas particuliers obtenus par des méthodes différentes.

1. Propriétés de l'écart. On appelle *écart* entre le point p et l'ensemble X, en symbole: $\varrho(p,X)$, la borne inférieure des distances $|p-x|$ où x parcourt X. Dans le cas où $X=0$, on conviendra que $\varrho(p,0)=\infty$.

[1]) Cf. la communication faite à la séance de la Société Polonaise de Mathématique, Section de Varsovie, le 5. XII 1947. (Annales de la Soc. Polon. de Math. 20 (1948), p. 403).

On constate facilement [2]) que l'écart jouit des propriétés suivantes:

(3) *si* $X \subset Y$, *on a* $\varrho(p,Y) \leqslant \varrho(p,X)$;

(4) *ou bien* $\varrho(p,X+Y)=\varrho(p,X)$, *ou bien* $\varrho(p,X+Y)=\varrho(p,Y)$;

(5) $\varrho(p,X)$ *est une fonction continue de* p (pour X fixe);

(6) $\varrho(p,X)=0$ *équivaut à* $p \epsilon \overline{X}$.

Les relations (3) et (4) signifient que $\varrho(p,X+Y)$ est le plus petit des nombres $\varrho(p,X)$ et $\varrho(p,Y)$.

2. L'ensemble $F(X)$. Soit E un sous-ensemble fixe (et non vide) de l'espace métrique 1. Faisons correspondre à tout $X \subset E$ l'ensemble

(7) $$F(X)=\underset{x}{E}\,[\varrho(x,X) \leqslant \varrho(x,E-X)],$$

c'est-à-dire l'ensemble de tous les points x qui satisfont à la condition figurant entre crochets [ ].

Il vient:

(8) $F(0)=0$, (9) $F(E)=1$.

Si $x \epsilon \overline{X}$, on a $\varrho(x,X)=0$ d'après (6); par conséquent

(10) $$\overline{X} \subset F(X).$$

Les fonctions $\varrho(x,X)$ et $\varrho(x,E-X)$ étant d'après (5) continues (pour E et X fixes), *l'ensemble* $F(X)$ *est fermé.*

Nous allons montrer que l'opération F est *additive*:

(11) $$F(X+Y)=F(X)+F(Y).$$

On a d'une part $F(X) \subset F(X+Y)$, car la condition $x \epsilon F(X)$ entraîne d'après (3) et (7)

$$\varrho(x,X+Y) \leqslant \varrho(x,X) \leqslant \varrho(x,E-X) \leqslant \varrho[x,E-(X+Y)],$$

d'où $x \epsilon F(X+Y)$.

Admettons d'autre part que $x \epsilon F(X+Y)$, c'est-à-dire que

$$\varrho(x,X+Y) \leqslant \varrho[x,E-(X+Y)],$$

et que conformément à (4)

$$\varrho(x,X+Y)=\varrho(x,X).$$

[2]) Voir par exemple ma *Topologie I* (deuxième édition), Monografie Matematyczne, Warszawa-Wrocław 1948, § 15, IV.

Il en résulte que $\varrho(x,X) \leqslant \varrho[x,E-(X+Y)]$ et, d'après (3), que $\varrho(x,X)=\varrho(x,X+Y) \leqslant \varrho(x,Y)$. Ces deux formules donnent en vertu de (4)

$$\varrho(x,X) \leqslant \varrho[x,E-(X+Y)+Y] \leqslant \varrho(x,E-X)$$

(puisque $E-(X+Y)+Y=E-X+Y \supset E-X$), c'est-à-dire $x \epsilon F(X)$.

La formule (11) étant ainsi établie, on en déduit aussitôt, en tenant compte de (9), la propriété importante de $F(X)$:

(12) $X_1+\ldots+X_n=E$ *entraîne* $F(X_1)+\ldots+F(X_n)=1$.

Nous allons montrer que

(13) $$E\cdot F(X)=E\cdot\overline{X}.$$

En tenant compte de (10), il reste à démontrer que $E\cdot F(X) \subset \overline{X}$.

Supposons par contre que $x \epsilon [E\cdot F(X)-\overline{X}]$. Il en résulte que $x \epsilon F(X)-\overline{X}$, donc, vu (6) et (7), que $0<\varrho(x,X) \leqslant \varrho(x,E-X)$, d'où $x \operatorname{non} \epsilon E-X$; comme $x \epsilon E$, on aurait donc $x \epsilon X$, contrairement à l'hypothèse que $x \operatorname{non} \epsilon \overline{X}$.

La formule (13) implique en particulier que

(14) *si X est fermé dans E, on a* $E\cdot F(X)=X$,

c'est-à-dire que $F(X)$ *est un prolongement fermé de* X.

Remarque. La formule (11) implique les trois suivantes, qui d'ailleurs n'interviendrons pas dans la suite [3]):

(15) $F(XY) \subset F(X)\cdot F(Y)$ (16) $F(X)-F(Y) \subset F(X-Y)$,

(17) $X \subset Y$ *entraîne* $F(X) \subset F(Y)$.

3. L'ensemble $G(X)$. Posons

(18) $$G(X)=\underset{x}{E}\,[\varrho(x,X)<\varrho(x,E-X)].$$

On constate aussitôt que

(19) $$G(X)=1-F(E-X).$$

Rapprochées de l'égalité (19), les formules (8)-(14) impliquent que l'ensemble *ouvert* $G(X)$ jouit des propriétés suivantes:

(20) $G(E)=1$, (21) $G(0)=0$,

[3]) Pour la démonstration, voir ibidem, § 4, III.

(22) $$G(X\cdot Y)=G(X)\cdot G(Y),$$

(23) $$X_1\cdot\ldots\cdot X_n=0 \quad \textit{entraîne} \quad G(X_1)\cdot\ldots\cdot G(X_n)=0,$$

(24) $$E\cdot G(X)=E-\overline{E-X},$$

(25) *si X est ouvert dans E, on a* $E\cdot G(X)=X$,

c'est-à-dire que $G(X)$ *est un prolongement ouvert de* X.

4. Applications. On a les théorèmes suivants qui se correspondent mutuellement par dualité:

Théorème A. Étant donnée une famille (de puissance arbitraire) d'ensembles X_ι fermés dans E, il existe une famille d'ensembles F_ι telle que F_ι est un prolongement fermé de X_ι et que

(26) $$X_{\iota_1}+\ldots+X_{\iota_n}=E \quad \textit{entraîne} \quad F_{\iota_1}+\ldots+F_{\iota_n}=1$$

quel que soit le système (fini) d'indices $\iota_1,\ldots,\iota_n$ [4]).

Il suffit, en effet, de poser $F_\iota=F(X_\iota)$.

De même, en posant $G_\iota=G(X_\iota)$, on obtient le

Théorème B. Étant donnée une famille d'ensembles X_ι ouverts dans E, il existe une famille d'ensembles G_ι telle que G_ι est un prolongement ouvert de X_ι et que

(27) $$X_{\iota_1}\cdot\ldots\cdot X_{\iota_n}=0 \quad \textit{entraîne} \quad G_{\iota_1}\cdot\ldots\cdot G_{\iota_n}=0$$

quel que soit le système (fini) d'indices $\iota_1,\ldots,\iota_n$ [5]).

Les familles $\{X_\iota\}$ et $\{G_\iota\}$ sont donc *semblables au sens combinatoire* [6]).

[4]) L'énoncé suivant, dû à L. Vietoris (voir Fundamenta Mathematicae 19 (1932), p. 271), est un cas très particulier du théorème A: *à tout couple d'ensembles fermés M et N correspond un couple d'ensembles fermés P et Q tels que*

$$P+Q=1, \qquad P(M+N)=M \qquad \textit{et} \qquad Q(M+N)=N.$$

[5]) Dans le cas particulier où l'indice ι n'admet que deux valeurs, on tire du théorème B l'énoncé bien connu suivant (cf. par exemple H. Tietze, Mathematische Annalen 88 (1923), p. 301): *M et N étant deux ensembles séparés* (ou — ce qui revient au même — disjoints et ouverts dans leur somme), *il existe deux ensembles ouverts G et H tels que*

$$M\subset G, \qquad N\subset H \qquad \textit{et} \qquad GH=0.$$

[6]) Notion due à P. Alexandroff (Annals of Mathematics 30 (1928), p. 16).

Remarques. 1. Le théorème B reste vrai en remplaçant la relation (27) par la suivante:

(28) $$X_{\iota_1}\cdot\ldots\cdot X_{\iota_n}=0 \quad \textit{entraîne} \quad \overline{G}_{\iota_1}\cdot\ldots\cdot\overline{G}_{\iota_n}=\overline{X}_{\iota_1}\cdot\ldots\cdot\overline{X}_{\iota_n}\ [7]).$$

Pour s'en convaincre, on remarquera au préalable que — d'une façon générale — si $X\subset G$ et G est ouvert, il existe un G^* ouvert tel que

(29) $$X\subset G^*\subset G \qquad \text{et} \qquad \overline{G^*}\subset G+\overline{X}.$$

En effet, les ensembles X et $Y=1-G-\overline{X}$ sont séparés, car

$$\overline{X}\cdot Y=0 \qquad \text{et} \qquad X\cdot\overline{Y}\subset X\cdot\overline{1-G}=X\cdot(1-G)=0.$$

Il existe donc [8]) un ensemble ouvert H tel que $X\subset H$ et $\overline{H}\cdot Y=0$; l'ensemble (ouvert) $G^*=G\cdot H$ satisfait aux formules (29).

Ceci établi, posons $G_\iota=G(X_\iota)$ et désignons par G_ι^* un ensemble ouvert tel que

$$X_\iota\subset G_\iota^*\subset G_\iota \qquad \text{et} \qquad \overline{G_\iota^*}\subset G_\iota+\overline{X}_\iota.$$

Il vient

(30) $$\overline{X}_{\iota_1}\cdot\ldots\cdot\overline{X}_{\iota_n}\subset\overline{G^*_{\iota_1}}\cdot\ldots\cdot\overline{G^*_{\iota_n}}\subset(G_{\iota_1}+\overline{X}_{\iota_1})\cdot\ldots\cdot(G_{\iota_n}+\overline{X}_{\iota_n}).$$

Le troisième membre de cette double inclusion est contenu dans le premier. En effet, on a d'une part $G_{\iota_1}\cdot\ldots\cdot G_{\iota_n}=0$ d'après (23) et, d'autre part, tout produit de n facteurs choisis parmi les ensembles

$$G_{\iota_1},\ldots G_{\iota_n}, \qquad \overline{X}_{\iota_1},\ldots,\overline{X}_{\iota_n}$$

et dont un facteur au moins appartient au second groupe, est contenu dans le premier membre de la formule (30), puisque G_ι étant ouvert, on a d'une façon générale [9]) $\overline{E}\cdot G_\iota\subset\overline{E\cdot G_\iota}$, d'où $\overline{E}\cdot G_\iota\subset\overline{X}_\iota$ en vertu de (25) et par conséquent $G_\iota\cdot\overline{X}_\varkappa\subset\overline{X}_\iota\cdot\overline{X}_\varkappa$.

[7]) Ainsi formulé, le théorème B implique en particulier que $A_1,\ldots,A_n$ étant un système d'ensembles séparés deux à deux, il existe un système d'ensembles ouverts $G_1,\ldots,G_n$ tels que

$$A_i\subset G_i \qquad \text{et} \qquad \overline{A_i}\cdot\overline{A_j}=\overline{G_i}\cdot\overline{G_j} \quad \text{pour} \quad i\neq j.$$

Pour cet énoncé, cf. mon livre précité, § 16, V, 9. Pour le cas $n=2$, voir K. Menger, Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums 1 (1931), p. 16.

[8]) En vertu du théorème précité de Vietoris.

[9]) Voir mon livre précité, § 5, III.

On parvient ainsi à l'égalité

$$\overline{G^*_{\iota_1}}\cdot\ldots\cdot\overline{G^*_{\iota_n}}=\overline{X}_{\iota_1}\cdot\ldots\cdot\overline{X}_{\iota_n}$$

qui, rapprochée de la double inclusion (29), montre que les ensembles G^*_ι satisfont au théorème B complété par (28).

2. Les suites *finies* $X_{\iota_1},\ldots,X_{\iota_n}$ dans (26) et (27) ne peuvent pas être remplacées par des suites *infinies*.

Pour s'en convaincre, on désignera par 1 l'ensemble des nombres réels et par E celui des nombres rationnels:

$$E=(r_1,r_2,\ldots).$$

Soit $X_n=(r_n)$. On a

$$X_1+X_2+\ldots=E,$$

tandis que

$$F(X_1)+F(X_2)+\ldots\neq 1.$$

Car la condition $E\cdot F(X_n)=X_n=(r_n)$ implique que l'ensemble fermé $F(X_n)$ est non-dense. La somme $F(X_1)+F(X_2)+\ldots$ est donc de I^e^ catégorie au sens de Baire.

ON THE SEPARABILITY OF TOPOLOGICAL SPACES

BY

R. SIKORSKI (WARSAW)

1. Consider the following six properties of a topological space [1] $\mathfrak{X}$:

(*B*) *$\mathfrak{X}$ possesses a basis* [2].

($\overline{M}$) *Every transfinite strictly increasing sequence of open subsets of $\mathfrak{X}$ is at most enumerable* [3].

($\underline{M}$) *Every transfinite strictly decreasing sequence of open subsets of $\mathfrak{X}$ is at most enumerable.*

(*I*) *Every isolated subset of $\mathfrak{X}$ is at most enumerable.*

(*D*) *$\mathfrak{X}$ contains an at most enumerable subset X which is dense in $\mathfrak{X}$* [4].

(*S*) *Every class of mutually disjoint open subsets of $\mathfrak{X}$ is at most enumerable.*

The following seven implications are true for any topological space [5]:

$$\text{(i)}\qquad \begin{array}{ccccc} (\overline{M}) & \rightarrow & (I) & \rightarrow & (S) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ (B) & \rightarrow & (\underline{M}) & \rightarrow & (D) \end{array}$$

If the space is metric, the implication $(S)\rightarrow(B)$ is also true, i. e. all the properties (B), $(\overline{M})$, $(\underline{M})$, (I), (D), (S) are equivalent.

---

[1]) A space is called *topological* if it fulfils the three well-known axioms of Kuratowski. See C. Kuratowski, *Topologie I* (second edition), Monografie Matematyczne, Warszawa-Wrocław 1948, p. 20.

[2]) I. e. an enumerable sequence of open sets such that every open subset of $\mathfrak{X}$ is the sum of some subsequence of this sequence.

[3]) The property $(\overline{M})$ is equivalent (for arbitrary topological spaces) to the following property: every class G of open sets contains an enumerable subclass G_0 such that $\Sigma(G)=\Sigma(G_0)$.

[4]) I. e. $\overline{X}=\mathfrak{X}$, where $\overline{X}$ denotes the *closure* of the set X.

[5]) Cf. e. g. E. Marczewski, *Séparabilité et multiplication cartésienne des espaces topologiques*, Fundamenta Mathematicae 34 (1947), p. 127-143, see 1.2 (i), 1.3 (i) and (iii), p. 130-133. See also C. Kuratowski, op. cit., p. 146.