SUR UN PROBLÈME TOPOLOGIQUE DE LA THÉORIE DE LA MESURE [1]

PAR

C. KURATOWSKI (VARSOVIE)

M. Choquet a posé le problème[2] qui peut être formulé comme suit:

Soit S un espace métrique compact de dimension 1 *(au sens de Menger). Soient $\varepsilon > 0$ et $\boldsymbol{R}$ un recouvrement fini de S par des ensembles ouverts*[3] *G_i tels que*

(1) $$\delta(G_i) < \varepsilon;$$

posons

(2) $$\alpha(\varepsilon) = \text{borne inf} \sum_i [\delta(\overline{G}_i - G_i)]^2,$$

$\boldsymbol{R}$ parcourant les recouvrements assujettis à la condition (1) *et $\delta(X)$ désignant le diamètre de l'ensemble X, c'est-à-dire la borne supérieure des distances $|x - x'|$ où $x, x' \in X$.*

Montrer que

(3) $$\lim_{\varepsilon=0} \alpha(\varepsilon) = 0.$$

Je vais démontrer que la réponse à ce problème est négative. Je vais, en effet, définir sur le plan euclidien un continu S non-dense, donc de dimension 1, et qui ne vérifie pas la relation (3).

1. Définition du continu S. I désignant l'intervalle fermé $0 \leqslant x \leqslant 1$, soit C un ensemble fermé situé dans I, non-dense, de mesure positive et contenant les points 0 et 1. La construction de l'ensemble C est tout à fait analogue à celle de l'ensemble parfait non-dense de Cantor. La seule différence concerne la

[1] Communication présentée à la Section de Varsovie de la Société Polonaise de Mathématique, le 23. I. 1948.

[2] G. Choquet, ce volume, p. 29, problème P 2.

[3] entendus ici et dans la suite au sens relatif, c'est-à-dire par rapport à S.

longueur des intervalles contigus; ils sont choisis de façon que la somme des longueurs de ces intervalles soit inférieure à 1. En conséquence, la mesure de C est positive: $m(C) > 0$.

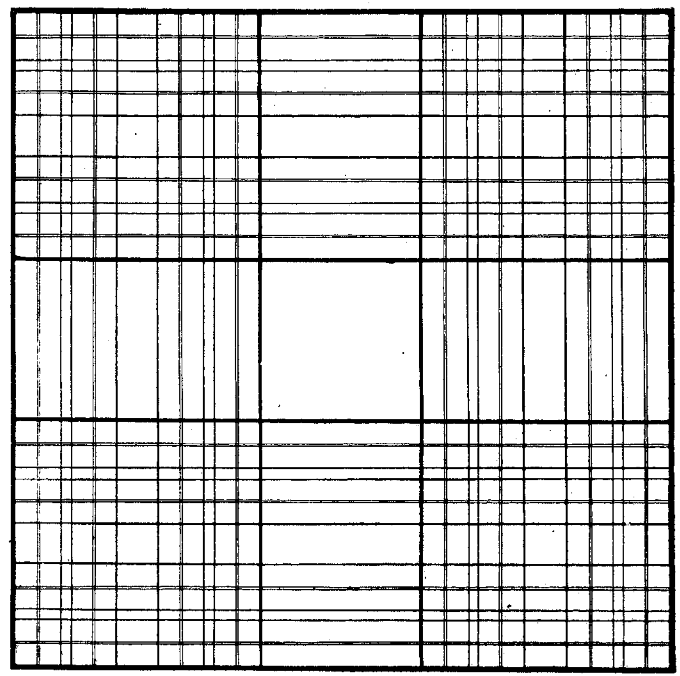
Soit S l'ensemble-somme de tous les segments

$$x \in C, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad y \in C, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

En symbole:

$$S = C \times I + I \times C;$$

la multiplication étant entendue au sens cartésien.



On constate aussitôt que S est un continu non-dense et que sa mesure (plane) est positive: $m(S) > 0$ (l'aire totale des rectangles contigus à S étant $[m(C)]^2 < 1$).

2. Propriétés du continu S. Nommons — pour abréger — *angulaires* les 4 points: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ et $(1,1)$. Soit G un sous-ensemble ouvert de S.

1. *Tout point non angulaire de G est point intérieur d'un segment rectiligne contenu dans G.*

Soit, en effet, $p=(x,y)\in C\times I$. Il s'agit de définir un segment qr tel que $p\in qr\subset G$ et $q\neq p\neq r$.

Dans le cas où $0<y<1$, il existe un intervalle $y'y''$ tel que

$$y'<y<y'' \quad \text{et} \quad (x\times y'y'')\subset G$$

(vu que G est ouvert et que $x\times I\subset S$).

On posera dans ce cas $q=(x,y')$ et $r=(x,y'')$.

Dans le cas où $y=0$, on a $0<x<1$ (le point p n'étant pas angulaire); il existe par conséquent un intervalle $x'x''$ tel que

$$x'<x<x'' \quad \text{et} \quad (x'x''\times 0)\subset G$$

(vu que le point 0 appartient à C, d'où $I\times 0\subset S$).

On posera dans ce cas $q=(x',y)$ et $r=(x'',y)$.

2. *A tout couple de points p et s, dont p est un point non angulaire de G, correspond un point p' de G tel que*

$$|s-p'|>|s-p|. \tag{4}$$

Car, p étant un point intérieur du segment $qr\subset G$, on a soit $|s-q|>|s-p|$, soit $|s-r|>|s-p|$.

La propriété 2 implique la suivante:

3. *Soient p et s deux points de $\bar{G}$ tels que*

$$|p-s|=\delta(G). \tag{5}$$

Alors, si p n'est pas un point angulaire, il appartient à la frontière de G; autrement dit:

$$p \text{ non-}\in G.$$

Car, en supposant que $p\in G$, il existerait un point p' de G vérifiant l'inégalité (4); on aurait donc $|p'-s|>\delta(G)$, contrairement à la définition du diamètre.

Nous en déduirons la propriété suivante du continu S, sur laquelle repose la solution du problème envisagé.

4. *Si* $\delta(G)<1$, *on a*

$$\delta(G)\leqslant\delta(\bar{G}-G)\cdot\sqrt{2}. \tag{6}$$

Soient, en effet, p et s deux points de $\bar{G}$ satisfaisant à (5).

Deux cas peuvent se présenter:

(a) Ni p ni s n'est un point angulaire. On a alors d'après 3 $p,s\in(\bar{G}-G)$, d'où $|p-s|\leqslant\delta(\bar{G}-G)$, donc $\delta(G)\leqslant\delta(\bar{G}-G)$ en vertu de (5).

(b) L'un des deux points p et s est angulaire. Il est légitime d'admettre que ce soit p et que $p=(0,0)$. Comme $\delta(G)<1$, le point s n'est donc pas angulaire et l'on a d'après 3:

$$s \text{ non-}\in G, \quad \text{donc} \quad s\in\bar{G}-G. \tag{7}$$

Posons $s=(x,y)$. On a évidemment soit $|s|\leqslant x\sqrt{2}$, soit $|s|\leqslant y\sqrt{2}$. On peut admettre que

$$|s|\leqslant x\sqrt{2}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad |p-s|\leqslant x\sqrt{2}. \tag{8}$$

Le diamètre de l'ensemble G étant inférieur à 1, le point $(0,1)$ n'appartient pas à G. Le segment $0\leqslant y\leqslant 1$ de l'axe Y étant contenu dans S et unissant le point $(0,0)$ de $\bar{G}$ au point $(0,1)$ de $S-G$, il existe sur ce segment un point t de la frontière $\bar{G}-G$. On a par conséquent d'après (7)

$$|s-t|\leqslant\delta(\bar{G}-G). \tag{9}$$

D'autre part, on a évidemment $x\leqslant|s-t|$, donc d'après (8)

$$|p-s|\leqslant|s-t|\cdot\sqrt{2}. \tag{10}$$

Les formules (5), (9) et (10) entraînent aussitôt l'inégalité (6).

3. Conclusion. Soit $G_1,\ldots,G_n$ un système d'ensembles ouverts (non vides) tels que

$$S=G_1+\ldots+G_n \quad \text{et} \quad \delta(G_i)<1 \quad \text{pour } i=1,2,\ldots,n.$$

Soit $p_i\in G_i$. Soit A_i un cercle fermé de centre p_i et de rayon $\delta(G_i)$. On a donc $G_i\subset A_i$, d'où $S\subset A_1+\ldots+A_n$. En vertu de (6), la mesure plane $m(S)$ de S vérifie par conséquent les relations:

$$m(S)\leqslant\sum_i m(A_i)=\pi\cdot\sum_i[\delta(G_i)]^2\leqslant 2\pi\cdot\sum_i[\delta(\bar{G}_i-G_i)]^2.$$

Il en résulte d'après (2), pour $\varepsilon<1$, que $m(S)\leqslant 2\pi\cdot\alpha(\varepsilon)$, c'est-à-dire $\alpha(\varepsilon)\geqslant m(S)/2\pi$.

Comme $m(S)>0$, l'égalité (3) est en défaut.