Pour $j=1,2,\ldots,n$, on a $j<q-1$. Le nombre $q\pm j$ est d'après (1) diviseur du nombre a et on a $q\pm j>1$; par conséquent, $q\pm j$ est d'après (3) aussi diviseur du nombre $p\pm j$ et on a $q\pm j<p\pm j$ en vertu de (2). Ainsi le nombre $p\pm j$, où $j=1,2,\ldots,n$, n'est pas premier, c. q. f. d.

Corollaire. *Il existe une infinité des nombres premiers qui n'appartiennent à aucun couple de nombres jumeaux.*

Tels sont, en effet, tous les nombres premiers p pour lesquels les nombres $p\pm1$ et $p\pm2$ ne sont pas premiers [1]).

Remarques. La démonstration du théorème, dont l'énoncé est fort simple, faisant intervenir le théorème sur la progression arithmétique, il serait peut-être intéressant d'en trouver une démonstration élémentaire.

Je ne connais non plus aucune démonstration élémentaire du corollaire [2]).

Jelenia Góra, septembre 1947.

[1]) Par exemple: tous les nombres premiers de la forme $15k+7$ où $k=1,2,\ldots$

[2]) Pour une démonstration par les méthodes de la théorie analytique des nombres et qui est d'ailleurs assez facile, cf. par exemple la communication de E. Ullrich, *Zum Zwillingssatz von Viggo Brun*, Bericht über die Mathematiker-Tagung in Tübingen 23-27 September 1946, p. 139-143.

UN THÉORÈME SUR LES NOMBRES $\cos 2\pi k/n$

PAR

A. MOSTOWSKI (VARSOVIE)

M. Lehmer et récemment MM. Hamming et Olmsted [1]) ont envisagé le caractère algébrique des nombres $\cos 2\pi k/n$. Je prouverai ici le théorème suivant, se rattachant aux mêmes nombres.

Théorème. *Lorsque $(k,n)=1$, le nombre $\cos 2\pi k/n$ s'exprime par des radicaux réels si et seulement si $\varphi(n)$ est une puissance de 2, c'est-à-dire si $n=2^{\alpha}\cdot p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_k$, les nombres $p_1,p_2,\ldots,p_k$ étant premiers de la forme $2^{\beta}+1$ et qui diffèrent deux à deux.*

Démonstration. Le nombre $2\cos 2\pi k/n$ satisfait à une équation irréductible du degré $\varphi(n)/2$ [2]). Donc, si $\varphi(n)/2$ est divisible par un nombre impair, $2\cos 2\pi k/n$ ne s'exprime pas par des radicaux réels [3]).

Pour établir l'implication inverse, admettons que $\varphi(n)$ est une puissance de 2. Les n-ièmes racines de 1 s'expriment alors par des radicaux carrés, donc sous la forme $a+bi$, où a et b s'obtiennent des nombres rationnels par des opérations rationnelles et par des radicaux carrés portant sur des quantités réelles [4]). Le nombre $\cos 2\pi k/n$ étant la partie réelle d'une n-ième racine de l'unité, le théorème se trouve démontré.

Corollaire. *Si $\cos 2\pi k/n$ s'exprime par des radicaux réels il s'exprime aussi par des radicaux carrés, de sorte que l'angle $2\pi k/n$ est constructible à l'aide d'un compas et d'une règle.*

[1]) D. H. Lehmer, American Mathematical Monthly 40 (1933), p. 165-166; R. W. Hamming, ibidem 52 (1945), p. 336-337; J. M. H. Olmsted, ibidem, p. 507-508.

[2]) Lehmer, loco cit., p. 165.

[3]) N. G. Tschebotarev, *Tieoria Galois* (en russe), 1936, p. 65.

[4]) Tschebotarev, op. cit., p. 66.

Application. Supposons qu'on mesure l'angle α en secondes. Pour quelles valeurs entières de α obtiendra-t-on les valeurs de $\cos\alpha$ exprimables par des radicaux réels?

L'angle 2π étant égal à $2^7\cdot 3^4\cdot 5^3$ secondes, on voit que α doit être un multiple de $2^7\cdot 3^4\cdot 5^3/n_0$ où n_0 est le plus grand des diviseurs de $2^7\cdot 3^4\cdot 5^3$ pour lesquels $\varphi(n_0)$ est une puissance de 2. Évidemment $n_0=2^7\cdot 3\cdot 5$, donc les α cherchés sont des multiples de 675″, c'est-à-dire de 11′15″.

A PROOF THAT e^m IS IRRATIONAL

BY

Z. BUTLEWSKI (POZNAŃ)

Niven has given a simple proof that π is irrational [1]). Using the same method [2]) we give here a similarly simple proof that e^m is irrational for any positive integer m [3]).

We define the polynomials:

$$f(x)=\frac{(m^2-x^2)^n}{n!},$$

$$F(x)=f(x)-f'(x)+f''(x)-\ldots+(-1)^n f^{(2n)}(x),$$

where n is a positive integer. Then $f(m)=f'(m)=\ldots=f^{(n-1)}(m)=0$, and $f^{(n)}(x), f^{(n+1)}(x),\ldots,f^{(2n)}(x)$ have integral values for $x=m$. Since $f(x)=f(-x)$ and $f^{(j)}(x)=(-1)^j f(-x)$, we have $f(-m)=f'(-m)=\ldots=f^{(n-1)}(-m)=0$, and $f^{(n)}(x), f^{(n+1)}(x),\ldots,f^{(2n)}(x)$ assume integral values for $x=-m$. Thus, $F(m)$ and $F(-m)$ are *integers*. By elementary calculus we have:

$$\frac{d}{dx}[e^x F(x)]=e^x[F(x)+F'(x)]=e^x f(x).$$

Suppose that $e^m=\frac{a_m}{b_m}$ (for some positive integer m), where a_m and b_m are positive integers.

We have:

$$(*)\qquad a_m b_m\int_{-m}^{+m} e^x f(x)\,dx=a_m b_m[e^x F(x)]_{-m}^{+m}=a_m^2 F(m)-b_m^2 F(-m).$$

---

[1]) Ivan Niven, *A simple proof that π is irrational*, Bulletin of the American Mathematical Society 53 (1947), p. 509.

[2]) This method is analogous to that used by Hurwitz for the proof that e is transcendental. Cf. E. Goursat, *Cours d'Analyse Mathématique*, I, 3-me édition, Paris, 1917 p. 210.

[3]) G. H. Hardy and E. M. Wright write in *An Introduction to the Theory of Numbers* (Oxford 1938, p. 47): „There are other special proofs of the irrationality of e, e^2 and e^3, but it is not much easier to prove e^m irrational, for arbitrary integral m, than it is to prove the full theorem of 11.13". This theorem says: „e is transcendental".