où n est souvent borné par des considérations d'ordre économique ($n \leqslant 40$, par exemple).

5. L'objection à soulever contre l'emploi de la règle de Bayes est la suivante. Comment sait-on que la roulette du producteur est graduée uniformément? Or, il n'y a pas d'hypothèse plus simple et, en la rejetant, nous serions contraints de recourir à une autre ou bien d'introduire des concepts et des méthodes qui, bien que correctes, sont trop subtiles pour l'usage que l'auteur des *Tables* avait en vue. Le calcul des probabilités nous enseigne comment on mesure certains ensembles d'objets; dans la géometrie pratique on mesure les aires en se servant des hypothèses euclidiennes car il n'y a aucun argument en faveur des hypothèses plus compliquées.

L'hypothèse de Bayes dans ce genre de problèmes est une convention qui ne peut être démentie par l'expérience, les tables statistiques ne présupposant rien sur l'univers dont on tire la drogue on un traitement.

Pour être à l'abri de toute objection, il suffirait d'avertir le lecteur que le calcul repose sur l'hypothèse d'une probabilité uniforme à priori. Si l'on voulait, en suivant des exemples célèbres, recourir à la méthode du „maximum likelihood", on obtiendrait justement la „vraisemblance" $100^0/_0$ dans les cas où tous les essais réussissent, et les médecins n'en seraient pas moins choqués par la vraisemblance $100^0/_0$ qu'ils ne l'ont été (avec raison) par la probabilité $100^0/_0$.

PROBLÈMES

A. MOSTOWSKI (VARSOVIE)

P36. On appelle *semblables* deux relations R et S définies dans un ensemble E lorsqu'il existe une transformation biunivoque φ de E en lui-même telle que xRy équivaut à $\varphi(x)S\varphi(y)$ pour tout couple x,y d'éléments de E. Une classe de toutes les relations semblables définies dans l'ensemble E est dite un *nombre relatif*.

Soit $\varrho(n)$ le nombre des nombres relatifs différents pour l'ensemble E de n éléments. Quelle est la valeur (exacte ou asymptotique) de la fonction $\varrho(n)$?

Varsovie, 7. II. 1948

S. HARTMAN (WROCŁAW)

P37. M. Ostrowski a généralisé comme suit un théorème établi par Hecke [1]):

Soient: α un nombre réel, I un sous-intervalle demi-ouvert $\langle a,b)$ de l'intervalle $\langle 0,1\rangle$, tel que $|I| = q\alpha - [q\alpha]$ pour un nombre naturel q (les crochets désignant la partie entière du nombre qu'ils renferment), et N' le nombre des n naturels non supérieurs à N et tels que $n\alpha - [n\alpha] \epsilon I$. On a alors pour tout N naturel

$$|N' - N|I|| < q.$$

Est-ce que ce théorème se laisse étendre au système fini de $m > 1$ nombres réels $\alpha_1, \dots, \alpha_m$? Il s'agit d'établir, par exemple, un énoncé du type suivant [2]):

Soient: I_i pour $i = 1, \dots, m$ un sous-intervalle demi-ouvert $\langle a_i, b_i)$ de $\langle 0,1\rangle$ de longueur $|I_i| = q_i\alpha_i - [q_i\alpha_i]$ où q_i est un nombre naturel, et N' le nombre des n naturels ne dépassant

[1]) E. Hecke, *Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. Eins*, Abhandlungen des Mathematischen Seminars der Hamburgischen Universität 1 (1922), p. 54-76; A. Ostrowski, *Mathematische Miszellen*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 36 (1927), p. 178-180 et 39 (1930), p. 34-46.

[2]) en vue des applications aux fonctions presque périodiques au sens de H. Bohr; cf. S. Hartman, *Sur les bases statistiques*, Studia Mathematica 10 (1948), à paraître.

pas N et tels que $na_i - [na_i] \epsilon I_i$ pour toutes les m valeurs de l'indice i. On a alors pour tout N naturel

$$\big| N' - N|I_1| \cdots |I_m| \big| \leqslant f(q_1, \ldots, q_m),$$

où la fonction f (qui est à déterminer) ne dépend pas de N.

En particulier — si c'est plus facile — on peut supposer que $q_1 = \ldots = q_m$.

Nouveau Livre Écossais, Probl. 40, 9. III. 1947

V. JARNÍK (PRAGUE)

P 38. Etant donnés n nombres réels indépendants (c'est-à-dire tels que $c_0 + c_1\theta_1 + \ldots + c_n\theta_n = 0$, où $c_0, c_1, \ldots, c_n$ sont des entiers, entraîne $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0$), soit $\beta'(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ la borne supérieure de tous les nombres β qui satisfont à la condition suivante:

Il existe pour tout nombre t suffisamment grand ($t > t_0$ où t_0 dépend de β) $n+1$ entiers $x_1, \ldots, x_{n+1}$ tels que

$$0 < \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| \leqslant t \quad \text{et} \quad |x_1\theta_1 + \ldots + x_n\theta_n + x_{n+1}| < t^{-\beta}.$$

On sait que

$$n \leqslant \beta'(\theta_1, \ldots, \theta_n) \leqslant +\infty.$$

Est-ce qu'on peut faire correspondre à tout β' de l'intervalle $n < \beta' < +\infty$ un système $\theta_1, \ldots, \theta_n$ tel que l'on ait

$$\beta'(\theta_1, \ldots, \theta_n) = \beta'?$$

Nouveau Livre Écossais, Probl. 58, 7. VI. 1947

J. G.-MIKUSIŃSKI (LUBLIN)

P 39. Est-ce qu'on peut avoir identiquement $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = 0$ pour $t \geqslant 0$ quand aucune des deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$, continues pour $t \geqslant 0$, n'est identiquement nulle?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 63, 7. XII. 1947

S. GOŁĄB (CRACOVIE)

P 40. Soient: $f(x)$ une fonction réelle continue sur le segment $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $\varphi(u)$ une fonction réelle croissante sur le segment $a \leqslant u \leqslant b$ où $\varphi(a) = 0$ et $\varphi(b) = 1$. Posons

$$F(t) = \int_a^b f[t \cdot \varphi(u)]\,du.$$

Est-il vrai que l'identité $F(t) = 0$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ entraîne l'identité $f(x) = 0$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$?

Pour le cas particulier dans lequel $a = 0$, $b = \pi/2$ et $\varphi(u) = \sin u$, le théorème est dû à E. J. McShane [3]).

Cracovie, 10. X. 1947

[3]) Cf. T. Bonnesen und W. Fenchel, *Theorie der konvexen Körper*, Berlin 1934, p. 138.

G. CHOQUET (GRENOBLE)

P 41. Soient E et E' deux espaces métriques. On dira que E et E' sont *équivalents par décomposition borelienne dénombrable* s'il existe une *partition* dénombrable de E en ensembles e_i boreliens dans E: $E = \sum_{i=1}^{\infty} e_i$, et une partition analogue de E': $E' = \sum_{i=1}^{\infty} e'_i$, avec e_i congruent à e'_i pour $i = 1, 2, \ldots$

Cette relation est une relation d'équivalence. Désignons-la par $\sim$. On dira que $E < E'$ si $E \sim E''$ où $E'' \subset E'$.

Existe-t-il dans la famille des ensembles fermés linéaires totalement discontinus de mesure 1, un ensemble E_0 *plus petit* que tous les autres et un ensemble E_1 *plus grand* que tous les autres?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 49, 10. V. 1947

W. SIERPIŃSKI (VARSOVIE)

P 42. Étant donné un ensemble de points X situé dans l'espace euclidien $\mathcal{E}_n$ à n dimensions, soit $\Phi_n(X)$ la famille de tous les ensembles différents situés dans $\mathcal{E}_n$ et congruents à X (c'est-à-dire superposables à lui par translation ou rotation).

J'ai démontré le théorème suivant [5]) pour $n = 1$:

Il existe pour toute puissance infinie $\mathfrak{n}$ ne dépassant pas celle du continu un ensemble $X \subset \mathcal{E}_1$ tel que $\Phi_1(X)$ est de puissance $\mathfrak{n}$.

Ce théorème est-il vrai pour $n = 2$ et $n = 3$? En particulier, existe-t-il dans $\mathcal{E}_2$ un ensemble X pour lequel la famille $\Phi_2(X)$ est dénombrable?

P 43. Soit, sous les mêmes hypothèses, $\Psi_n(X)$ la famille de tous les ensembles différents situés dans $\mathcal{E}_n$ et semblables à X (au sens de la géométrie élémentaire).

Le théorème précité reste-t-il vrai en y remplaçant $\Phi_1(X)$ par $\Psi_1(X)$? En particulier, existe-t-il dans $\mathcal{E}_1$ un ensemble X pour lequel la famille $\Psi_1(X)$ est dénombrable?

Varsovie, 31. III. 1948

[5]) W. Sierpiński, *Sur les translations d'ensembles*, Fundamenta Mathematicae 35 (à paraître).

R. SIKORSKI (VARSOVIE)

P 44. Deux espaces métriques compacts de dimension nulle et dont chacun est homéomorphe à un sous-ensemble ouvert de l'autre sont-ils nécessairement homéomorphes?

La réponse négative serait en particulier une preuve que l'hypothèse d'additivité dénombrable dans le théorème de Cantor-Bernstein généralisé aux corps de Boole [6]) ne se laisse pas remplacer par une hypothèse plus faible.

Varsovie, 25. IV. 1948

P 44, R 1. Un exemple (non publié) signalé par K. Kuratowski montre que la réponse est négative pour les espaces métriques compacts de dimension 1.

[6]) Cf. ce volume, p. 140-144, en particulier p. 143, Theorem 2.

K. BORSUK (VARSOVIE)

P 45. A étant un ensemble compact de dimension nulle situé dans l'espace euclidien $\mathcal{E}_n$ de dimension $n>3$, est-ce que le groupe fondamental de l'ensemble $\mathcal{E}_n - A$ peut être différent de 0?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 70, 20. VI. 1948

P 46. Appelons *diviseur topologique* de l'espace E tout ensemble A pour lequel il existe un ensemble B tel que le produit cartésien $A \times B$ est homéomorphe à E.

Est-ce qu'un diviseur topologique du polyèdre est toujours un polyèdre?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 71, 20. VI. 1948

L. A. SANTALÓ (ROSARIO)

P 47. Let K be a closed plane convex region which moving without deformation on the plane contains always at least a point of entire coordinates of the plane.

Determine the minimal value of the area F of K.

The same if K is not convex.

P 47, R 1. It was proved [6]) that $1 < F < \sqrt{2}$.

Rosario, March 9, 1948

[6]) L. A. Santaló, *Geometria integral de figuras ilimitadas*, Publicaciones del Instituto de Matematicas de Rosario 1, fasc. 2 (1942) and H. Hadwiger, *Bemerkungen über Gitter und Volumen*, Mathematica 18 (1942).

Z. CHARZYŃSKI (VARSOVIE)

P 48. Existe-t-il pour tout nombre naturel n un nombre naturel $m = m(n)$ satisfaisant à la condition:

Étant donnée dans l'espace euclidien à n dimensions une courbe K allant du point a au point b et représentée paramétriquement par l'équation $x = x(t)$ où $0 \leqslant t \leqslant 1$, il y a pour tout nombre θ compris entre 0 et 1 un système de $2m$ valeurs de x:

$$x_i = x(t_i) \quad \text{où} \quad 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \ldots \leqslant t_{2m} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad i = 1, 2, \ldots, 2m$$

telles que

$$(x_2 - x_1) + (x_4 - x_3) + \ldots + (x_{2m} - x_{2m-1}) = \theta(b - a),$$

les opérations sur les points étant entendues au sens vectoriel?

Pour $n \leqslant 2$ la réponse est affirmative [7]) et l'on a

$$m(1) = 1, \qquad m(2) = 2.$$

Est-il vrai que $m(n) \leqslant 2^{n-1}$ pour tout n naturel?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 69, 1. V. 1948

[7]) Ce résultat de l'auteur n'a pas été encore publié.

V. HLAVATÝ (PRAGUE)

P 49. Une surface reglée, envisagée comme espace à une dimension E_1, est caractérisée (à moins des conditions initiales) par trois courbures $k_1(s)$, $k_2(s)$ et $k_3(s)$ où s est le paramètre projectif de E_1. L'équation $k_3=0$ caractérise toute surface reglée située dans un complexe *linéaire* et peut par conséquent être envisagée comme équation naturelle de la surface en question.

Cela étant, trouver

1⁰ l'équation naturelle des surfaces situées dans un complexe donné d'avance (pas nécessairement linéaire),

2⁰ des équations naturelles des surfaces situées dans une congruence reglée donnée d'avance (pas nécessairement linéaire).

Nouveau Livre Écossais, Probl. 57, 6. VI. 1947

W. ŚLEBODZIŃSKI (WROCŁAW)

P 50. Etant donné le système d'équations différentielles du deuxième ordre

$$\frac{d^2x^h}{dt^2}=\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}^h(x)\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} \qquad (h=1,2,\ldots,n),$$

trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que ses courbes intégrales puissent être partagées en ∞^{n-1} congruences de façon que la correspondance entre les tangentes aux lignes de ces congruences en divers points soit une homographie.

Nouveau Livre Écossais, Probl. 77, 20. X. 1948

COMPTES RENDUS

SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE
SECTION DE WROCŁAW

SÉANCE DU 9 JANVIER 1948

W. Ślebodziński. *Géométrie textile et connexions affines.*

Les problèmes de la Géométrie textile peuvent être traités en associant à un réseau de courbes ou de surfaces, ou enfin à un réseau mixte, un espace à connexion affine convenablement choisi. Cette méthode peut être illustrée par les exemples suivants où quelques cas les plus simples sont considérés.

Soit, en premier lieu, un réseau formé de $n+1$ familles d'hypersurfaces dans un domaine d'une variété X_n de coordonnées x^h (où $h=1,2,\ldots,n$). On peut trouver n formes pfaffiennes ω^i (où $i=1,2,\ldots,n$) aux variables x^h, telles que les familles d'hypersurfaces du réseau soient définies par les équations

$$\omega^1=0,\quad \omega^2=0,\quad \ldots,\quad \omega^n=0,\quad \omega^1+\omega^2+\ldots+\omega^n=0. \tag{1}$$

Ceci posé, on peut associer au réseau une connexion affine basée sur le groupe de transformations linéaires

$$\bar{u}^h=ku^h+a^h; \tag{2}$$

cette connexion est liée au réseau de façon invariante si l'on impose la condition que le vecteur d'Einstein $S_{hi}^{\cdot\cdot\cdot i}$ soit nul.

Les équations de structure de la connexion sont de la forme:

$$(\omega^h)'+\omega\cdot\omega^h=\Omega^h,\qquad \omega'=\Omega,$$
$$\Omega^h={}^1/_2\,S_{rs}^{\cdot\cdot\cdot h}[\omega^r\omega^s],\qquad \Omega={}^1/_2\,K_{rs}[\omega^r\omega^s],$$

où $S_{rs}^{\cdot\cdot\cdot h}$ est le tenseur de torsion et K_{rs} est celui de courbure; entre ces deux tenseurs, il y a relation de la forme

$$(n-2)K_{rs}=\nabla_p S_{rs}^{\cdot\cdot\cdot p},$$

où ∇_p est le symbole de la différentiation covariante.

Les équations (1) étant complètement intégrables par hypothèse, il en résulte des relations entre les composantes du tenseur de torsion dont la signification géométrique est la suivante: la torsion qui correspond à un cycle infinitésimal situé dans un élé-