SUR LA CONVERGENCE UNIFORME DES DÉVELOPPEMENTS ORTHOGONAUX DE FONCTIONS BORNÉES

PAR

W. ORLICZ (POZNAŃ)

1. Soit (a_{ni}) où $n=1,2,\ldots$ et $i=1,2,\ldots$ un tableau de nombres à lignes finies, c'est-à-dire tel que $a_{ni}=0$ à partir d'un $i=N(n)$.

Etant donné un espace de Banach X, la suite $\xi=\{x_i\}$ d'éléments de X est dite *sommable vers y par la méthode T* (méthode de Toeplitz) *correspondante au tableau* (a_{ni}) lorsque la suite

$$T_n(\xi)=\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}x_i$$

converge dans X vers y.

La méthode T est dite *permanente dans* X lorsque toute suite qui converge vers y est sommable par elle vers y. On voit sans peine que toute méthode permanente dans X l'est aussi dans l'espace des nombres réels.

En désignant par $\sup\operatorname{ess}|x(t)|$ la borne inférieure des nombres k qui satisfont à l'inégalité $|x(t)|>k$ dans un ensemble A de mesure 0 situé dans l'intervalle donné (a,b), on appelle *essentiellement bornée* toute fonction $x(t)$ telle que

$$\sup\operatorname{ess}|x(t)|<\infty.$$

(M) désignera l'espace de Banach composé de fonctions $x(t)$ mesurables et essentiellement bornées dans l'intervalle ouvert (a,b), avec la définition usuelle de l'addition d'éléments et de la multiplication par nombres réels, la norme étant définie par la formule

$$\|x\|_\infty=\sup\operatorname{ess}|x(t)|.$$

Si $x_n(t)-x(t)\,\epsilon\,(M)$ et $\|x_n-x\|_\infty\to 0$, on dit que la suite $\{x_n(t)\}$ est *essentiellement uniformément convergente* vers la fonction $x(t)$ dans (a,b) [1]).

[1]) Cette définition ne suppose pas que $x_n(t)\,\epsilon\,(M)$.

(R) désignera l'espace métrique composé de fonctions mesurables et qui sont essentiellement bornées par le nombre 1 dans (a,b):

$$\sup\operatorname{ess}|x(t)|\leqslant 1,$$

la distance entre les éléments $x=x(t)$ et $y=y(t)$ étant

$$\int_a^b |x(t)-y(t)|\,dt.$$

Soit $y=U(x)$ une opération définie dans (M) dont les valeurs appartiennent à un espace de Banach Y. L'opération $U(x)$ est dite *linéaire au sens* (l) lorsqu'elle est additive, c'est-à-dire que $U(x'+x'')=U(x')+U(x'')$ pour $x',x''\,\epsilon\,(M)$, et continue au sens suivant:

Pour tout K constant, les relations $\sup\operatorname{ess}|x_n(t)|\leqslant K$ et $x_n(t)\overset{as}{\to}x(t)$ [2]) entraînent la relation $U(x_n)\to U(x)$.

Toute opération linéaire au sens (l) est évidemment continue dans (R).

La suite $\{U_n(x)\}$ d'opérations linéaires au sens (l) s'appelle *équicontinue au sens* (l) lorsque, pour tout K constant, les relations $\sup\operatorname{ess}|x_n(t)|\leqslant K$ et $x_n(t)\overset{as}{\to}0$ entraînent la relation $U_n(x_n)\to 0$.

Les deux théorèmes suivants sont connus:

A [3]). *Si la suite* $\{U_n(x)\}$ *d'opérations linéaires au sens* (l) *converge dans un ensemble de II*ᵉ *catégorie dans* (R), *elle converge aussi dans l'espace* (M) *tout entier, son opération limite est continue au sens* (l) *et, de plus, cette suite est équicontinue au sens* (l).

[2]) $x_n(t)\overset{as}{\to}x(t)$ désigne la convergence asymptotique (convergence en mesure) de la suite $\{x_n(t)\}$ vers $x(t)$ dans l'intervalle (a,b).

[3]) Le théorème A subsiste sous l'hypothèse que les valeurs des opérations $U_n(x)$ sont des éléments d'un espace du type (F); voir mon travail *Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées*, Studia Mathematica 10 (1948), p. 60-89, en particulier Théorème 13, p. 78, et Remarque 5, p. 80-81, où le mot „résiduel" est à remplacer par les mots „de IIᵉ catégorie". La démonstration est tout à fait analogue à celle donnée par Saks pour le cas particulier dans lequel le contredomaine des opérations est l'espace des fonctions mesurables; voir S. Saks, *On some functionals*, Transactions of the American Mathematical Society 41 (1947), p. 160-170, et A. Alexiewicz, *Sur les suites d'opérations (II)*, § 13, à paraître dans Studia Mathematica.

B[4]). *Etant donnée une suite $\{f_n(t)\}$ de fonctions sommables dans l'intervalle (a, b). si la suite des fonctionelles*

$$U_n(x)=\int_a^b f_n(t)\,x(t)\,dt \tag{1}$$

converge pour toute fonction $x(t)$ essentiellement bornée, la fonctionnelle limite est de la forme

$$U(x)=\int_a^b f(t)\,x(t)\,dt, \tag{2}$$

où $f(t)$ est une fonction sommable dans (a, b) et, de plus, les fonctions

$$V_n(u)=\int_a^u |f_n(t)|\,dt \tag{3}$$

sont équi-absolument continues dans (a, b).

Le théorèmème B résulte sans peine du théorème A. Posons en effet

$$F(u)=U(x_u(t)) \quad \text{où} \quad x_u(t)=\begin{cases}1 \text{ pour } a\leqslant t<u,\\ 0 \text{ pour } u<t<b.\end{cases}$$

D'après le théorème A, la fonctionnelle limite $U(x)$ de la suite (1) est linéaire au sens (l); par conséquent, la fonction $F(u)$ est absolument continue; on a donc $F(u)=\int_a^u f(t)\,dt$ où $f(t)$ est une fonction sommable. Il en résulte sans peine que, pour toute fonction scalariforme $y(t)$, on a $U(y)=\int_a^b f(t)\,y(t)\,dt$.

Soit $x(t)$ un élément arbitraire de (M); il existe une suite de fonctions scalariformes $y_n(t)$, telle que

$$\operatorname{sup\,ess}|y_n(t)|\leqslant \operatorname{sup\,ess}|x(t)| \quad \text{et} \quad y_n(t)\xrightarrow{as} x(t).$$

La fonctionnelle $U(x)$ étant continue au sens (l), il en résulte (2) pour tout $x(t)\epsilon(M)$.

De la même manière l'équicontinuité des intégrales $\int_a^u |f_n(t)|\,dt$ résulte de la thèse finale du théorème A.

[4]) On trouve le théorème B dans le travail: H. Steinhaus, *Sur les développements orthogonaux*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences (1926), p. 12-39.

2. Nous allons donner une application des théorèmes A et B à l'étude de la divergence de développements orthogonaux.

Soit, dans l'intervalle (a, b), un système orthonormal $\Phi=\{\varphi_i(t)\}$ composé de fonctions essentiellement bornées. Considérons le développement orthogonal suivant le système Φ de la fonction $x(t)$ essentiellement bornée:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i\varphi_i(t) \quad \text{où} \quad a_i=\int_a^b x(t)\varphi_i(t)\,dt. \tag{4}$$

Posons

$$T_n(x,\tau)=\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}s_i(x,\tau) \quad \text{où} \quad s_i(x,\tau)=\sum_{k=1}^{i} a_k\varphi_k(\tau). \tag{5}$$

La série (4) sera dite *essentiellement uniformément sommable par la méthode T* dans l'intervalle (a, b) lorsqu'il existe un ensemble E de mesure 0 tel que la suite $\{T_n(x,\tau)\}$ converge uniformément dans l'ensemble $(a, b)-E$.

Sous les hypothèses admises sur la série (4), sa sommabilté essentiellement uniforme équivaut à la sommabilité par la méthode T de la suite $s_i=s_i(x,\tau)$ d'éléments de l'espace (M).

Théorème. Soit dans l'intervalle (a, b) un système infini orthonormal Φ composé de fonctions essentiellement bornées. Soit T une méthode permanente de sommation dans (M), correspondante au tableau (a_{ni}) à lignes finies. Alors l'ensemble de toutes les fonctions $x(t)\epsilon(R)$ dont le développement orthogonal suivant le système Φ est essentiellement uniformément sommable par la méthode T est de I^e catégorie dans (R).

Démonstration. Supposons que la suite (5) soit essentiellement uniformément convergente pour toute fonction $x(t)$ appartenant à l'ensemble X_0 qui est de II^e catégorie dans (R). Deux cas sont à considérer:

$$1^0 \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\|\varphi_n(t)\|_\infty<\infty, \qquad 2^0 \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\|\varphi_n(t)\|_\infty=\infty.$$

Dans le cas 1^0, désignons par A un ensemble mesurable dans lequel les fonctions $\varphi_i(t)$ sont simultanément continues. Pour $x=x(t)\,\epsilon\, X_0$, la suite (4) converge en tout point de densité 1 de l'ensemble A, donc dans un ensemble fixe A_0 qui ne diffère de A que par un ensemble de mesure 0. On peut choisir l'ensemble A

de façon que sa mesure diffère de $b-a$ aussi peu que l'on veut; par conséquent, la suite (5) converge dans un ensemble H de mesure $b-a$ pour toute fonction $x=x(t)\epsilon X_0$. D'après le théorème A, cette suite est convergente pour toute fonction essentiellement bornée et pour tout $\tau\epsilon H$. D'après le théorème B, sa limite est de la forme $\int_a^b x(t)f(t,\tau)\,dt$ où $f(t,\tau)$ est une fonction sommable pour tout $\tau\epsilon H$. En posant $\varphi_k=\varphi_k(t)$, on a $s_i(\varphi_k,\tau)=\psi_k(\tau)$ pour $i\neq k$. La méthode T étant par hypothèse parmanente dans (M), donc aussi dans l'espace des nombres réels, on a

$$\lim_{n\to\infty} T_n(\varphi_k,\tau)=\varphi_k(\tau) \quad \text{pour} \quad \tau\epsilon(a,b).$$

Il en résulte l'identité

$$\int_a^b \varphi_k(t)f(t,\tau)\,dt=\varphi_k(\tau) \quad \text{pour tout} \quad \tau\epsilon H.$$

D'autre part, on démontre sans peine que, pour tout système orthonormal satisfaisant à la condition 1^0, les coefficients du développement de toute fonction sommable tendent vers 0 [5]. Cependant, comme $\int_a^b \varphi_k^2(t)\,dt=1$, il est impossible (en vertu de 1^0) que l'on ait $\varphi_k(\tau)\to 0$ presque partout dans l'intervalle (a,b). On arrive donc à la contradiction.

Dans le cas 2^0, les sommes (5) sont des opérations linéaires au sens (l) et dont les valeurs appartiennent à l'espace (M). D'après le théorème A, la suite (5) converge dans l'espace (M) tout entier et l'opération limite est continue au sens (l). Posons

$$\sup\operatorname{ess}|x_i(t)|=m_i$$

et soit $k_1,k_2,\ldots$ une suite d'indices telle que $m_{k_i}\to\infty$.

En posant $x_i(t)=\varphi_{k_i}(t)/m_{k_i}$, on a donc:

$$\sup\operatorname{ess}|x_i(t)|=1.$$

$$\int_a^b |x_i(t)|\,dt\leqslant\frac{1}{m_{k_i}}\Big(\int_a^b \varphi^2{}_{k_i}(t)\,dt\Big)^{1/2}(b-a)^{1/2}=\frac{(b-a)^{1/2}}{m_{k_i}}\to 0.$$

[5] S. Kaczmarz und H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, Monografie Matematyczne 6, Warszawa-Lwów 1936 p. 155-156.

On a par conséquent $x_i(t)\overset{as}{\to}0$ et le théorème A entraîne la relation $\|U(x_i)\|_\infty\to 0$. D'autre part, on a

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x_i,\tau)=U(x_i)=x_i=\varphi_{k_i}(t)/m_{k_i}$$

et, de plus, $\|x_i\|_\infty=1$. On parvient donc aussi à la contradiction.

Remarques. Pour tout système orthonormal infini, il existe — comme j'ai démontré ailleurs [6]) — une fonction mesurable bornée dont le développement orthogonal n'est pas essentiellement uniformément convergent. J'y ai employé une méthode différente de démonstration, sans admettre toutefois que le système orthonormal soit composé de fonctions essentiellement bornées.

Or, dans le théorème qui vient d'être établi, on peut aussi supprimer l'hypothèse que $\sup\operatorname{ess}|\varphi_n(t)|<\infty$ pour $n=1,2,\ldots$, pourvu qu'on remplace en même temps la sommabilité au moyen de la méthode T par la convergence (au sens ordinaire) suivant la norme $\|x\|_\infty$, c'est-à-dire par la convergence essentielle uniforme.

Il suffit de considérer le cas où

$$\sup\operatorname{ess}|\varphi_n(t)|=\infty \tag{5}$$

pour une infinité des n. En effet, si la relation (5) ne se présente que pour un nombre fini d'indices n, il suffit de choisir un m tel que $\sup\operatorname{ess}|\varphi_k(t)|<+\infty$ pour $k\geqslant m$ et d'appliquer le théorème démontré au système $\Phi=\varphi_m(x),\varphi_{m+1}(x),\ldots$

Admettons donc que

$$\sup\operatorname{ess}|\varphi_{n_i}(t)|=\infty \quad \text{où} \quad n_i<n_{i+1} \quad \text{pour} \quad i=1,2,\ldots$$

et que, pour tout x appartenant à un ensemble X_0 de II[e] catégorie dans (R), la série (4) est essentiellement uniformément convergente dans (a,b). Les fonctions

$$\int_a^b x(t)\varphi_{k_i}(t)\,dt\,|\varphi_{k_i}(\tau)|$$

convergent alors essentiellement uniformément dans (a,b) vers 0 pour tout $x\epsilon X_0$. Choisissons τ_i de façon que l'on ait

$$|\varphi_{k_i}(\tau_i)|\geqslant i\Big(\int_a^b|\varphi_{k_i}(t)|\,dt\Big)^{-1}$$

[6]) W. Orlicz, *Eine Bemerkung über Divergenzphänomene von Orthogonalentwicklungen*, Studia Mathematica 2 (1930), p. 87-90.

et que τ_i soit un point de densité 1 d'un ensemble dans lequel la fonction $\varphi_{k_i}(t)$ est continue. On a alors pour tout $x \epsilon X_0$

$$U_i(x) = \int_a^b x(t)\varphi_{k_i}(t)dt\,|\varphi_{k_i}(\tau_i)| \to 0;$$

en posant $x_i = \operatorname{sign}\varphi_{k_i}(t)\frac{1}{\sqrt{i}}$ et en appliquant le théorème A, on obtient

$$U_i(x_i) = \int_a^b |\varphi_{k_i}(t)|\,dt\,\frac{|\varphi_{k_i}(\tau_i)|}{\sqrt{i}} \to 0.$$

On a d'autre part $U(x_i) \geqslant \sqrt{i} \to +\infty$, ce qui est impossible.

TWO NOTES ON THE SUMMABILITY OF INFINITE SERIES

BY

A. ZYGMUND (CHICAGO)

I. ON A THEOREM OF HARDY

1. Hardy's theorem

A series $u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots$ summable $(C, 1)$ and with terms $O(1/n)$ is convergent

was historically the first O-Tauberian theorem. Though later more general results were found (like Littlewood's), Hardy's theorem is still useful because of the elementary character of its proof and its sufficiency for many problems. For this reason any simplification of its proof is of interest, if only for didactic purposes, though of course there is no room for basic changes here.

In this note a proof of Hardy's theorem is reproduced which I usually give in my courses.

Let s_n and

$$\sigma_n = (s_0+s_1+\ldots+s_n)/(n+1)$$

be the partial sums and the first arithmetic means of the series $u_0+u_1+\ldots$ We shall also consider the *delayed* arithmetic means

$$(1) \qquad \sigma_{n,k} = \frac{s_n+s_{n+1}+\ldots+s_{n+k-1}}{k} = \frac{(n+k)\sigma_{n+k-1}-n\sigma_{n-1}}{k} = $$
$$= \left(1+\frac{n}{k}\right)\sigma_{n+k-1} - \frac{n}{k}\sigma_{n-1}$$

of the sequence $\{s_n\}$. If k tends to infinity with n in such a way that the ratio n/k remains bounded, then $\sigma_{n,k}$ defines a method of summability which is at least as strong as the method $(C, 1)$. For if $\sigma_n \to s$, then the last term in (1) is $s+o(1)$.

The peculiarity of the method (which seems to have been first considered by de la Vallée Poussin [2] for different purposes) is that $\sigma_{n,k}$ is obtained from s_n by adding to it a linear