Suppose that f and g are isomorphisms of $\boldsymbol{A}$ on $B\boldsymbol{B}$ and of $\boldsymbol{B}$ on $A\boldsymbol{A}$ respectively. Since f and g are σ-homomorphisms, then there exist by Theorem 1 two elements $C\in\boldsymbol{A}$ and $D\in\boldsymbol{B}$ such that

$$f(C)=D' \quad \text{and} \quad g(D)=C'.$$

By Lemma (C), $C\boldsymbol{A}$ is isomorphic to $D'\boldsymbol{B}$ and $D\boldsymbol{B}$ is isomorphic to $C'\boldsymbol{A}$. By Lemma (B), the algebras $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ are isomorphic, q. e. d.

In order to prove that the theorem of Cantor-Bernstein is a particular case of Theorem 2, it is enough to note that two arbitrary sets X and Y have the same power if and only if $\boldsymbol{S}(X)$ and $\boldsymbol{S}(Y)$ are isomorphic [4].

Let $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$ be two abstract sets, $X\subset\mathfrak{X}$ and $Y\subset\mathfrak{Y}$. Suppose that $\overline{\overline{\mathfrak{X}}}=\overline{\overline{Y}}$ and $\overline{\overline{\mathfrak{Y}}}=\overline{\overline{X}}$, i.e. that $\boldsymbol{S}(\mathfrak{X})$ is isomorphic to $\boldsymbol{S}(Y)=Y\boldsymbol{S}(\mathfrak{Y})$, and $\boldsymbol{S}(\mathfrak{Y})$ is isomorphic to $\boldsymbol{S}(X)=X\boldsymbol{S}(\mathfrak{X})$. By Theorem 2, $\boldsymbol{S}(\mathfrak{X})$ is isomorphic to $\boldsymbol{S}(\mathfrak{Y})$, i.e. $\overline{\overline{\mathfrak{X}}}=\overline{\overline{\mathfrak{Y}}}$, q. e. d.

4. An unsolved problem. The question arises whether other theorems from the general theory of sets which can be expressed in terms of the theory of Boolean algebras may be generalized in the same way as the theorem of Cantor-Bernstein. For instance, the well known theorem of Bernstein on cardinal numbers:

$$2\mathfrak{m}=2\mathfrak{n} \quad \textit{implies} \quad \mathfrak{m}=\mathfrak{n}$$

can be expressed as follows:

(*) *If A and B are two elements of a Boolean algebra $\boldsymbol{A}$ such that $A\boldsymbol{A}$ is an isomorph of $A'\boldsymbol{A}$ and $B\boldsymbol{A}$ is an isomorph of $B'\boldsymbol{A}$, then $A\boldsymbol{A}$ and $B\boldsymbol{A}$ are isomorphic.*

This theorem may be deduced from Bernstein's theorem in case where $\boldsymbol{A}$ is totally additive (i. e. complete) and atomic. The following question is unsolved:

P25. Whether the theorem (*) is true for all infinitely or totally additive Boolean algebras?

[4] E. Szpilrajn-Marczewski, *On the isomorphism and the equivalence of classes and sequences of sets*, Fundamenta Mathematicae 32 (1939), pp. 133-148, in particular p. 137, (i).

UN THÉORÈME SUR LA CONVERGENCE UNIFORME DANS L'INTÉRIEUR

PAR

C. RYLL-NARDZEWSKI (LUBLIN)

On dit que la suite de fonctions (réelles ou complexes) définies sur un ensemble ouvert G situé dans un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions *converge uniformément dans l'intérieur* de G si elle converge uniformément sur tout sous-ensemble fermé et borné de G. Cette dénomination a été introduite par M. Montel [1]) et elle est devenue courante dans la théorie des fonctions analytiques.

Plusieurs auteurs ont traité certaines classes de fonctions (entières, holomorphes dans le cercle-unité, etc.) comme des espaces métriques, de façon que la convergence dans ces espaces coïncidait avec celle uniforme dans l'intérieur [2]). Il est facile de constater que les espaces définis par eux sont des espaces du type (F) au sens de Banach [3]).

La question s'impose, si la convergence uniforme dans l'intérieur ne se prête à une caractérisation au moyen de la norme du type (B), c'est-à-dire de la norme de Banach. Rappelons que, dans un espace E dit linéaire ou vectoriel [4]), on entend par *norme du type* (B) toute fonctionnelle réelle $[x]$, définie pour tout $x\in E$ et assujettie aux conditions [5]):

(a) $[x_1+x_2]\leqslant[x_1]+[x_2]$,

(b) $[\lambda\cdot x]=|\lambda|\cdot[x]$ pour tout nombre λ,

(c) $[x]=0$ équivaut à $x=0$.

[1]) P. Montel, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques*, Paris 1927, p. 26.

[2]) M. Fréchet, *Espaces abstraits*, Paris 1928, p. 87; S. Kierst et E. Szpilrajn-Marczewski, Fundamenta Mathematicae 21 (1933), p. 281; cf. aussi S. Saks et A. Zygmund, *Funkcje analityczne*, Monografie Matematyczne 10, Warszawa 1938, p. 49, ćwiczenie 3, et p. 116, ćwiczenie 3 (en polonais).

[3]) S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne 1, Warszawa 1932, p. 35.

[4]) S. Banach, op. cit., p. 26.

[5]) S. Banach, op. cit., p. 53.

MM. S. Mazur et W. Orlicz ont établi un théorème général concernant les ainsi dites pseudonormes [6]) et qui implique la réponse négative à la question. M. J. Mikusiński m'a proposé de chercher une démonstration directe de cette réponse. En profitant de quelques suggestions de M. Orlicz, j'ai remarqué que la proposition est encore vraie sous la forme plus générale suivante:

Théorème. Soit M une famille de fonctions (réelles ou complexes) définies sur un ensemble ouvert G situé dans un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions et telles que $f\epsilon M$ entraîne $\lambda f \epsilon M$ pour tout λ réel. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:

(I) *Il existe une fonctionnelle $[f]$ telle que*

(α) $|[\lambda\cdot f]| \geqslant \lambda\cdot[f]$ *pour tout λ réel,*

(β) *la suite $\{f_n\}$ où $f_n \epsilon M$ pour $n=1,2,\ldots$ converge vers 0 uniformément dans l'intérieur de G si $\lim\limits_{n\to\infty}[f_n]=0$ et seulement dans ce cas.*

(II) *Il existe un ensemble fermé et borné $F_0 \subset G$ tel que toute suite $\{f_n\}$ où $f_n \epsilon M$ pour $n=1,2,\ldots$ qui converge vers 0 uniformément dans F_0 converge vers 0 uniformément dans l'intérieur de G.*

Démonstration. Soit $\{F_n\}$ une suite croissante d'ensembles fermés et bornés, tels que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n = G$. Supposons que la condition (I) soit remplie et que la condition (II) ne le soit pas. Il existe alors, pour tout F_i, une suite $\{f_n^i\}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{F_i}|f_n^i|=0$ et que la relation $\lim\limits_{n\to\infty}[f_n^i]=0$ est en défaut. On peut extraire de $\{f_n^i\}$ une suite partielle $\{\bar{f}_n^i\}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{F_i}|\bar{f}_n^i|=0$ et $|[\bar{f}_n^i]|>\varepsilon_i$ où $\varepsilon_i>0$.

En posant $g_n^i=\frac{1}{\varepsilon_i}\bar{f}_n^i$, on a $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{F_i}|g_n^i|=0$ et, d'après (α), $|[g_n^i]|>1$.

Soit n_i le moindre nombre naturel tel que $\sup\limits_{F_i}|g_{n_i}^i|<1/i$. Évidemment, la suite $|[g_{n_i}^i]|$ est uniformément convergente dans chacun des ensembles F_i, donc uniformément convergente dans l'intérieur de G. D'autre part, on a $|[g_{n_i}^i]|>1$ pour $i=1,2,\ldots$, contrairement à (β). Il est ainsi démontré que (I) entraîne (II).

Pour démontrer que, réciproquement, (II) entraîne (I), il suffit de poser $[f]=\sup\limits_{F_0}|f|$.

La fonctionnelle $[f]$ est, de plus, homogène et, lorsque M est un espace linéaire, elle est une norme du type (B).

[6]) La définition de la *pseudonorme* s'obtient de celle de la norme en remplaçant la condition (c) par la suivante, qui est plus faible: $[0]=0$. Le théorème de MM. Mazur et Orlicz n'est pas encore publié. M. Orlicz a bien voulu m'en faire parvenir l'énoncé avec l'autorisation de le réproduire ici. Je le cite textuellement:

Soit $\{[x]_i\}$ une suite de pseudonormes définies dans l'espace E et telles que la condition $[x]_i=0$ pour $i=1,2,\ldots$ entraîne $x=0$. Alors, pour qu'il existe dans E une norme $[x]$ du type (B) telle que la condition $\lim\limits_{n\to\infty}[x_n]_i=0$ pour $i=1,2,\ldots$ soit équivalente à la condition $\lim\limits_{n\to\infty}[x_n]=0$, il faut et il suffit qu'il existe une suite $\{K_j\}$ de constantes positives et un indice m satisfaisant à la condition

$$[x]_j \leqslant K_j\cdot \max_{i=1,2,\ldots,m}[x]_i \quad pour \quad j=1,2,\ldots$$