icm©

INDÉPENDANCE D'ENSEMBLES ET PROLONGEMENT DE MESURES

(RÉSULTATS ET PROBLÈMES)

PAR

E. MARCZEWSKI (WROCŁAW)

Cette Note a pour but de passer en revue les théorèmes (dont les démonstrations, pour la plupart, n'ont pas été encore publiées) liant la notion d'indépendance au sens de la théorie générale des ensembles à celle d'indépendance stochastique et apportant, en outre, des applications de ces notions au problème du prolongement des mesures et à celui de leur existence dans les produits cartésiens.

Il s'agit, en particulier, de mettre en relief le rôle du théorème sur les mesures dans les corps indépendants établi en 1940 par Banach (Théorème II_∞) et de signaler quelques problèmes qui restent ouverts jusqu'à présent.

1. Indépendance d'ensembles. Considérons les sous-ensembles d'un ensemble fixe X (sur lequel on n'admet d'ailleurs aucune hypothèse). Désignons, pour tout ensemble $E \subset X$, par $-E$ le complémentaire de E, c'est-à-dire l'ensemble $X - E$.

$\boldsymbol{K}$ étant une classe de sous-ensembles de X, on dit que $\boldsymbol{K}$ est une *classe d'ensembles indépendants* [1]) au sens de la théorie générale des ensembles — ou bien que les ensembles appartenant à $\boldsymbol{K}$ sont *indépendants* — si, quelle que soit la suite finie $E_1, \ldots, E_n$ d'ensembles de cette classe, différents deux à deux, et quelle que soit la suite $i_1, \ldots, i_n$ composée de nombres 0 et 1, on a

$$(1) \qquad \prod_{k=1}^{n} (-1)^{i_k} E_k \neq 0.$$

[1]) Cf. Fichtenholz et Kantorovitch [3], p. 78, Hausdorff [4], Tarski [16], p. 53, et Marczewski [10], [12].

Les nombres entre crochets désignent les numéros de la liste des ouvrages cités qui se trouve à la fin de cette Note, p. 131-132.

En d'autres termes: les ensembles appartenant à $\boldsymbol{K}$ sont indépendants si aucun *atome* [2]) d'une suite finie quelconque d'ensembles de cette classe n'est vide. Si $\boldsymbol{K}$ est une classe d'ensembles indépendants, aucun ensemble de cette classe n'en contient aucun autre etc. L'indépendance d'ensembles peut être aussi formulée comme suit: aucune somme d'une suite finie de ces ensembles ne contient de produit d'une suite finie des autres.

En remplaçant dans la définition les suites finies par celles tout au plus dénombrables, on a la définition de l'*indépendance dénombrable*.

Il est évident que les ensembles dénombrablement indépendants sont à plus forte raison des ensembles indépendants. Il est évident aussi que les notions d'indépendance et d'indépendance dénombrable coïncident pour les classes finies d'ensembles.

Nous appellerons dans la suite *mesure* définie dans un corps $\boldsymbol{M}$ de sous-ensembles de X toute fonction d'ensemble $\mu(E)$ définie pour $E \epsilon \boldsymbol{M}$, non négative, additive et telle que $\mu(X) = 1$. En posant

$$\varrho_\mu(E_1, E_2) = \mu[(E_1 - E_2) + (E_2 - E_1)] \qquad \text{pour} \quad E_1, E_2 \epsilon \boldsymbol{M}$$

et en identifiant E_1 à E_2 lorsque $\varrho_\mu(E_1, E_2) = 0$, on obtient un espace métrique dont les éléments sont les sous-ensembles de X. La mesure μ est dite *séparable* si cet espace l'est [3]).

$\boldsymbol{K}$ étant une sous-classe de $\boldsymbol{M}$; on dit que $\boldsymbol{K}$ est une classe d'ensembles *stochastiquement indépendants* par rapport à la mesure μ — ou, plus court, que les ensembles appartenant à $\boldsymbol{K}$ sont *stochastiquement indépendants* par rapport à μ — lorsqu'on a

$$\mu(E_1 \cdot \ldots \cdot E_n) = \mu_1(E_1) \cdot \ldots \cdot \mu(E_n)$$

pour toute suite finie $E_1, \ldots, E_n$ d'ensembles de cette classe, différents deux à deux [4]).

[2]) On appelle ainsi précisément tout ensemble (vide ou non) ayant la forme du produit (1). Voir p. ex. mon ouvrage [12], p. 14, ou ce fascicule, p. 104.

[3]) Voir p. ex. Nikodym [14].

[4]) Il est clair que l'indépendance stochastique d'ensembles équivaut à l'indépendance (au sens de Kolmogoroff et Steinhaus) de leurs fonctions caractéristiques (au sens bien connu de de la Vallée-Poussin). Cf. p. ex. Kac [6], p. 47, définition 2, Kolmogoroff [7], p. 50, et ce volume, p. 113-114.

icm©

Une indépendance stochastique „dénombrable" ne donnerait rien de nouveau car — comme on le constate aussitôt — l'additivité dénombrable du corps $\boldsymbol{M}$ et de la mesure μ entraîne

$$\mu(E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots) = \mu(E_1) \cdot \mu(E_2) \cdot \ldots$$

pour toute suite infinie $\{E_n\}$ d'ensembles différents appartenant à la classe d'ensembles stochastiquement indépendants.

Exemple 1. Désignons par C l'ensemble de toutes les suites infinies $\{i_n\}$ composées de nombres 0 et 1, et par C_m l'ensemble des suites $\{i_n\} \epsilon C$ pour lesquelles on a $i_m = 1$. Soit C^* l'ensemble des $\{i_n\} \epsilon C$ qui n'admettent qu'un nombre fini de termes 1. Posons, enfin, $C_m^* = C_m C^*$.

On voit aussitôt que les ensembles C_m où $m = 1, 2, \ldots$ sont dénombrablement indépendants, tandis que les ensembles C_m^* ne le sont pas, tout en étant indépendants.

Exemple 2. Désignons par I l'intervalle fermé $0 \leqslant x \leqslant 1$ et par I^n sa n-ème puissance, c'est-à-dire le cube-unité de l'espace euclidien à n dimensions. Soit J_m^n l'ensemble de tous les points $(x_1, \ldots, x_n) \epsilon I^n$ tels que $\frac{1}{2} \leqslant x_m \leqslant 1$. On voit aisément que les ensembles $J_1^n, \ldots, J_n^n$ sont indépendants et qu'ils le sont stochastiquement par rapport à la mesure ordinaire n-dimensionnelle.

Exemple 3. Soit I_n l'ensemble de tous les nombres de I dont le développement dyadique contenant une infinité des zéros admet 1 comme son n-ème chiffre. Les ensembles $I_1, I_2, \ldots$ sont indépendants, mais ne le sont pas dénombrablement. Ils sont en même temps stochastiquement indépendants par rapport à la mesure linéaire ordinaire.

2. Prolongement d'une fonction arbitraire à une mesure. Bien que la notion d'indépendance au sens de la théorie générale des ensembles et celle d'indépendance stochastique soient de nature différente et que le terme „indépendance" leur ait été assigné d'ailleurs d'une manière tout à fait indépendante, elles se sont avisées liées par une étroite dépendance. En analysant le premier exemple d'une mesure non séparable, dû à Nikodym [5], j'ai réussi en 1938 à en dégager et à démontrer deux théorèmes parallèles que voici [6]):

Théorèmes I [et I_∞]. $\boldsymbol{K}$ étant une classe d'ensembles indépendants [dénombrablement indépendants], il existe pour toute fonction d'ensemble $\varphi(E)$ où $E \epsilon \boldsymbol{K}$, telle que $0 \leqslant \varphi(E) \leqslant 1$, une mesure [mesure dénombrablement additive] μ définie dans le plus petit corps [le plus petit corps dénombrablement additif] contenant $\boldsymbol{K}$ et satisfaisant aux conditions:

(1_I) *$\mu(E) = \varphi(E)$ pour tout $E \epsilon \boldsymbol{K}$,*

(2_I) *la classe $\boldsymbol{K}$ est stochastiquement indépendante par rapport à μ.*

Le théorème I contient celui établi en 1934 par Fichtenholz et Kantorovitch (à l'endroit précité). La démonstration du théorème I_∞ s'appuie sur le théorème I et sur celui bien connu concernant le prolongement de mesures à des mesures dénombrablement additives [7]).

Le rôle des théorèmes I et I_∞ est multiple. Outre les relations entre diverses notions d'indépendance, ils établissent une condition — qui est d'ailleurs non seulement suffisante, mais aussi nécessaire — pour que toute fonction bornée non négative, définie dans la classe donnée d'ensembles, se laisse prolonger à une mesure. Ils permettent aussi — faisant appel aux théorèmes connus sur l'existence des classes indénombrables d'ensembles indépendants — de démontrer facilement l'existence des mesures non séparables, celle des mesures par rapport auxquelles il existe des classes d'ensembles stochastiquement indépendants de grande puissance, etc [8]).

3. Prolongement commun de mesures dans les corps indépendants. Théorème de Banach. Généralisant les notions définies au n°1, nous dirons qu'une famille $\{\boldsymbol{M}_t\}$ de corps composés de sous-ensembles de X (et où t parcourt un ensemble arbitraire T)

[5]) Voir Nikodym [14].

[6]) Ces théorèmes ont été signalés par moi dans une communication préliminaire [10]. Leurs démonstrations et certains théorèmes réciproques se trouvent dans mon ouvrage [12].

[7]) Voir p. ex. Kolmogoroff [7], p. 15.

[8]) Cf. mon travail [12], p. 25-27.

en est une de *corps indépendants* lorsqu'on a $\prod_j E_j \neq 0$ pour toute suite finie d'ensembles E_j tels que

$$(*) \qquad 0 \neq E_j \epsilon M_{t_j} \qquad \text{où} \qquad t_j \neq t_k \qquad \text{pour} \qquad j \neq k.$$

En remplaçant dans cette définition les suites finies par celles au plus dénombrables, on en forme la définition de *l'indépendance dénombrable des corps.*

Soit $(E)_0$ pour tout $E \subset X$ la classe composée d'ensembles X, 0, E et $-E$. La classe $(E)_0$ est un corps dénombrablement additif d'ensembles.

Soit $\{E_t\}$, où $t \epsilon T$, une classe de sous-ensembles de X tels que $0 \neq E_t \neq X$.

Il est facile de voir que l'indépendance et l'indépendance dénombrable des ensembles E_t équivalent respectivement à celles des corps $(E_t)_0$. D'autre part, si $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, la fonction μ définie par les conditions:

$$\mu(X) = 1, \qquad \mu(0) = 0, \qquad \mu(E) = \xi \qquad \text{et} \qquad \mu(-E) = 1 - \xi$$

pour un $E \subset X$ non vide est évidemment une mesure dénombrablement additive dans le corps $(E)_0$.

Une famille de corps $\boldsymbol{M}_t \subset \boldsymbol{M}$, où $t \epsilon T$, sera dite *famille de corps stochastiquement indépendants* par rapport à la mesure μ définie dans le corps $\boldsymbol{M}$, lorsque toute classe d'ensembles $\{E_t\}$, où $E_t \epsilon \boldsymbol{M}_t$, est une classe d'ensembles stochastiquement indépendants par rapport à μ. On constate aisément que l'indépendance stochastique des ensembles $E_t \epsilon \boldsymbol{M}$ (où $t \epsilon T$) équivaut à celle des corps $(E_t)_0$.

Certaines remarques dans le livre de P. Lévy [9]) m'ont amené à formuler deux propositions suivantes qui — comme on le voit aussitôt en tenant compte des énoncés qui précèdent — constituent respectivement les généralisations des théorèmes I et I_∞:

Théorèmes II [et II_∞]. Soit $\{\boldsymbol{M}_t\}$ où $t \epsilon T$ une famille de corps indépendants [de corps dénombrablement additifs et dénombrablement indépendants] composés de sous-ensembles de X, tout $\boldsymbol{M}_t$ étant pourvu d'une mesure [d'une mesure dénombrablement additive] μ_t définie dans lui. Il existe alors une mesure commune [une mesure commune dénombrablement additive] μ, définie dans le plus petit corps [le plus petit corps dénombrablement additif] contenant tous les corps $\boldsymbol{M}_t$ et telle que:

(1_{II}) *$\mu(E) = \mu_t(E)$ pour $E \epsilon \boldsymbol{M}_t$ et pour tout $t \epsilon T$,*

(2_{II}) *les corps $\boldsymbol{M}_t$ sont stochastiquement indépendants par rapport à μ.*

Je suis parvenu à démontrer le théorème II au printemps de 1939 [10]). Le théorème II_∞, dont la démonstration est incomparablement plus difficile, a été démontré en 1940 par Banach; une autre démonstration de ce théorème a été trouvée par Saks [11]).

Le théorème II_∞ permet d'établir aussitôt les théorèmes sur l'existence des mesures dans les produits cartésiens [12]) — et même quelques théorèmes plus généraux — car les corps des ensembles dits *cylindriques*, correspondants aux axes différents, sont dénombrablement indépendants et l'indépendance stochastique coïncide dans ce cas avec la „loi du rectangle".

Quant au théorème II, l'hypothèse s'y laisse atténuer comme suit. Remplaçons dans la condition (*) de la définition de l'indépendance de corps l'inégalité $E_j \neq 0$ par l'inégalité $\mu_{t_j}(E_j) \neq 0$ et appelons la propriété des corps $\boldsymbol{M}_t$ qui en résulte ainsi leur *presque-indépendance* par rapport aux mesures μ_t. Une modification facile de la démonstration du théorème II conduit au théorème plus général suivant, qui est déjà reversible:

Théorème III. Soit $\{\boldsymbol{M}_t\}$, où $t \epsilon T$, une famille de corps composés de sous-ensembles de X, tout $\boldsymbol{M}_t$ admettant une mesure μ_t définie dans lui. Alors, pour qu'il existe une mesure commune μ, définie dans le plus petit corps contenant tous les $\boldsymbol{M}_t$ et assujettie aux conditions (1_{II}) *et* (2_{II}), *il faut et il suffit que les corps $\boldsymbol{M}$ soient presque-indépendants par rapport aux mesures μ_t.*

Le théorème III admet plusieurs applications que je publierai ailleurs [13]) et parmi lesquelles se trouve la solution négative d'un problème de MM. Z. Łomnicki et Ulam. Le problème de formuler et d'établir une généralisation analogue du théorème II_∞ est ouvert (voir plus loin, **P24** p. 130).

---

9) Voir Lévy [8], p. 27.

10) Cette démonstration paraîtra dans mon travail [13].

11) Voir les travaux posthumes de Banach [2] et de Saks [15].

12) Z. Łomnicki et S. Ulam [9], p. 245 et 252; Sparre Andersen and Jessen [1], p. 22.

13) probablement dans une Note aux Studia Mathematica.

icm©

4. Prolongement d'une mesure donnée. Kakutani a démontré en 1944 que la mesure de Lebesgue dans l'intervalle I se laisse prolonger à une mesure non séparable [14]). Ce résultat m'a suggéré l'idée du théorème suivant [15]), dont la démonstration ne diffère pas essentiellement de celle du théorème I_∞:

Théorème IV_∞. $\boldsymbol{M}$ étant un corps dénombrablement additif de sous-ensembles de X avec une mesure dénombrablement additive μ définie dans lui, soit $\boldsymbol{K}$ une classe de sous-ensembles de X satisfaisant à la condition: pour tout $E \epsilon \boldsymbol{M}$ tel que $\mu(E)>0$, pour toute suite d'ensembles différents $E_1, E_2, \ldots \epsilon \boldsymbol{K}$ et pour toute suite $\{i_n\}$ de nombres 0 et 1, on a

$$E \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (-1)^{i_n} E_n \neq 0. \tag{2}$$

Enfin, soit $\varphi(E)$ une fonction arbitraire d'ensemble $E \epsilon \boldsymbol{K}$ telle que $0 \leqslant \varphi(E) \leqslant 1$.

Il existe alors une mesure ν, définie dans le plus petit corps dénombrablement additif contenant $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{K}$ et telle que

$$\nu(E) = \begin{cases} \mu(E) & \text{pour } E \epsilon \boldsymbol{M}, \\ \varphi(E) & \text{pour } E \epsilon \boldsymbol{K}, \end{cases} \tag{1_{IV}}$$

(2_{IV}) *la classe $\boldsymbol{K}$ augmentée d'un $E \epsilon \boldsymbol{M}$ quelconque est une classe d'ensembles stochastiquement indépendants par rapport à ν.*

On remarquera qu'en désignant, pour tout ensemble $A \subset X$, par $\mu_e(A)$ sa *mesure extérieure* μ, c'est-à-dire la borne inférieure des nombres $\mu(E)$ pour $A \subset E \epsilon \boldsymbol{M}$, on peut formuler comme il suit l'hypothèse du théorème IV_∞ concernant la classe $\boldsymbol{K}$: *pour toute suite d'ensembles $E_1, E_2, \ldots \epsilon \boldsymbol{K}$ et pour toute suite $\{i_n\}$ de nombres 0 et 1, on a*

$$\mu_e\left(\prod_{n=1}^{\infty} (-1)^{i_n} E_n\right) = 1.$$

Le théorème IV, analogue au théorème IV_∞, mais concernant l'additivité finie, n'a pas besoin d'être formulé séparément, car — comme il est facile de le constater — il est contenu dans le théorème III.

[14]) Voir Kakutani [5]

[15]) communiqué le 27 juin 1947 à la séance de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie.

Le résultat de Kakutani résulte du théorème IV_∞ en vertu des propriétés connues de la mesure de Lebesgue et des ensembles indépendants. On peut dire que le théorème IV_∞ est en même rapport à son résultat que le théorème I_∞ l'est au résultat de Nikodym (mentionné au n°2, p. 124-125).

Il est remarquable que le théorème IV_∞, qui est une généralisation du théorème I_∞, n'est pas embrassé par la généralisation aussi forte du même théorème que celle de Banach (théorème II_∞). La recherche d'un énoncé qui embrasserait simultanément les théorèmes II_∞ et IV_∞ se rattache intimement au problème mentionné à la fin du n°3 (p. 127). En effet, le théorème IV_∞ serait évidemment embrassé par une modification du théorème II_∞ — à savoir par un théorème qui porterait le numéro III_∞ — dans laquelle, la thèse du théorème II_∞ laissée intacte, son hypothèse aurait été remplacée par une condition non seulement suffisante, mais aussi nécessaire.

Il est enfin à noter que le problème des réciproques aux théorèmes II et II_∞ peut être posé d'ailleurs d'une autre manière. À savoir, si *toutes* les mesures [mesures dénombrablement additives] μ_t définies dans les corps $\boldsymbol{M}_t$ donnés admettent un prolongement commun μ, même ne satisfaisant pas à la condition (2_{II}), les corps $\boldsymbol{M}_t$ sont indépendants [dénombrablement indépendants].

5. Problèmes ouverts. Pour envisager de plus près les problèmes signalés à la fin des n^{os} 3 et 4, considérons les propriétés suivantes des corps dénombrablement additifs $\boldsymbol{M}_t$ et des mesures dénombrablement additives μ_t définies respectivement dans ces corps:

(C) — la thèse du théorème II_∞,

(C_1) — l'hypothèse du théorème II_∞, c'est-à-dire l'indépendance dénombrable des corps $\boldsymbol{M}_t$,

(C_2) — ce que devient l'indépendance dénombrable en remplaçant dans la condition (*) de sa définition l'inégalité

$$E_j \neq 0 \tag{i_1}$$

par l'inégalité

$$\mu_{t_j}(E_j) \neq 0, \tag{i_2}$$

(C_3) — ce qu'elle devient en remplaçant (i_1) par l'inégalité

$$\prod_{j=1}^{\infty} \mu_{t_j}(E_j) \neq 0. \tag{i_3}$$

On a les implications évidentes $(C_1)\to(C_2)\to(C_3)$. Le théorème II_∞ exprime l'implication $(C_1)\to(C)$, mais il est facile de montrer par un exemple la fausseté de l'implication $(C)\to(C_1)$ et même de $(C)\to(C_2)$. Il suffit, en effet, de poser dans l'exemple 3 du n°1

$$M_n=(I_n)_0=(I,0,I_n,I-I_n)$$

et d'y prendre pour μ_n la mesure de Lebesgue. Alors (C_1) et (C_2) sont en défaut, puisque $\prod_{n=1}^{\infty} I_n=0$, tandis que (C) subsiste, car la mesure de Lebesgue dans I est un prolongement commun des μ_t et les corps M_n sont stochastiquement indépendants par rapport à elle. Il est aisé de constater, à l'aide du théorème IV_∞ par exemple, que l'implication $(C)\to(C_1)$ est fausse déjà dans le cas de deux corps M_1 et M_2.

Par contre, on voit facilement que l'implication $(C)\to(C_3)$ est vraie en toute généralité. En effet, si l'on admet (C) et (i_3), on a en raison de l'indépendance stochastique des corps M_t par rapport à μ

$$\mu\Big(\prod_{j=1}^{\infty} E_j\Big)=\prod_{j=1}^{\infty}\mu(E_j)=\prod_{j=1}^{\infty}\mu_{t_j}(E_j)\neq 0,$$

donc $E_1\cdot E_2\cdot\ldots\neq 0$.

Le problème suivant reste par conséquent à résoudre:

P 24. La généralisation $(C_3)\to(C)$, ou même seulement $(C_2)\to(C)$, du théorème II_∞ est-elle vraie?

Ce problème est ouvert même dans le cas de *deux* corps M_1 et M_2, donc aussi de deux mesures μ_1 et μ_2. Dans ce cas, les propriétés (C_2) et (C_3) sont évidemment équivalentes. Banach s'occupait de ce problème en 1941.

Les relations d'implication entre les propriétés (C) et (C_j) où $j=1,2,3$ peuvent être résumées par le tableau suivant, où les signes $+$, $-$ et ? désignent respectivement le vrai, le faux et le problème ouvert.

$j=$	1	2	3
$(C)\to(C_j)$	$-$	$-$	$+$
$(C_j)\to(C)$	$+$[16]	?	?

[16]) Le théorème de Banach (théorème II_∞, p. 126-127).

Dans le cas de deux corps, ce tableau se réduit à un plus simple:

$j=$	1	2,3
$(C)\to(C_j)$	$-$	$+$
$(C_j)\to(C)$	$+$	?

Ainsi, à la recherche d'une condition équivalente à (C), il faut en tout cas — comme le montre le tableau — rejeter les conditions (C_1) et (C_2). Si l'implication $(C_3)\to(C)$ se montrait vraie, on aurait l'équivalence $(C)\rightleftarrows(C_3)$, c'est-à-dire précisément le théorème qui, en nous tenant au numérotage adopté, serait désigné par III_∞. En outre, l'implication $(C_3)\to(C_1)$ embrasserait comme cas particulier le théorème IV_∞, qui — comme on l'a vu — n'est pas contenu dans le théorème II_∞.

Notons, pour terminer, que dans le cas de deux corps d'ensembles, quoique le problème de l'implication $(C_2)\to(C)$ soit ouvert, on peut facilement améliorer un peu l'implication $(C_1)\to(C)$ en remplaçant (C_1) par une propriété $(C_{1,2})$ moins forte — mais plus forte que (C_2) — à savoir, en substituant à (i_1) la condition

$(i_{1,2})$ $$\mu_1(E_1)\neq 0 \quad \text{et} \quad E_2\neq 0.$$

OUVRAGES CITÉS

[1] E. Sparre Andersen and B. Jessen, *Some limit theorems on integrals in an abstract set*, Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab, Matematisk-Fysiske Meddelelser 22, n°14 (1946).

[2] S. Banach, *Measures in independent fields of sets*, Studia Mathematica 10 (1948), à paraître.

[3] G. Fichtenholz et L. Kantorovitch, *Sur les opérations dans l'espace des fonctions bornées*, Studia Mathematica 5 (1934), p. 69-98.

[4] F. Hausdorff, *Über zwei Sätze von G. Fichtenholz und L. Kantorovitch*, Studia Mathematica 6 (1936), p. 18-19.

[5] S. Kakutani, *Construction of a non-separable extension of the Lebesgue measure space*, Proceedings of the Imp. Academy Tokyo, 20 (1944), p. 115-119.

[6] M. Kac, *Sur les fonctions indépendantes*, Studia Mathematica 6 (1936), p. 46-58.

[7] A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlin 1933.

[8] P. Lévy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Paris 1937.

[9] Z. Łomnicki et S. Ulam, *Sur la théorie de la mesure dans les espaces combinatoires et son application au calcul des probabilités, I. Variables indépendantes*, Fundamenta Mathematicae 23 (1934), p. 237-278.

[10] E. Marczewski (Szpilrajn), *Ensembles indépendants et mesures non séparables*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences 207 (Paris 1938), p. 768-770.

[11] — *Mesures dans les corps indépendants et les produits cartésiens* Annales de la Société Polonaise de Mathématique 19 (1946), p. 247-248.

[12] — *Ensembles indépendants et leurs applications à la théorie de la mesure*, Fundamenta Mathematicae 35 (1948), p. 13-28.

[13] — *Mesures dans les corps presque indépendants*, Fundamenta Mathematicae, à paraître.

[14] O. Nikodym, *Sur l'existence d'une mesure parfaitement additive et non séparable*, Mémoires de l'Académie Royale de Belgique 17 (1938), n°8.

[15] S. Saks, *Sur le théorème de Banach concernant les mesures dans les corps indépendants*, Fundamenta Mathematicae, à paraître.

[16] A Tarski, *Ideale in vollständigen Mengenkörpern I*; Fundamenta Mathematicae 32 (1939), p. 45-63.

MEASURES IN NON-SEPARABLE METRIC SPACES

BY

E. MARCZEWSKI (WROCŁAW) AND R. SIKORSKI (WARSAW)

In this paper we call a *measure* every σ-additive set function $\mu(X)$, such that $0 \leqslant \mu(X) \leqslant +\infty$, defined on a σ-additive field of subsets of a set $\mathfrak{X}$. A measure is said to be *σ-finite*, if $\mathfrak{X}$ is the sum of an enumerable sequence of sets of finite measure.

A measure on the field of all Borel subsets of a metric space $\mathfrak{X}$ is called a *Borel measure* in $\mathfrak{X}$.

The chief problem of this paper [1]) is a decomposition of any metric space $\mathfrak{X}$ with a σ-finite Borel measure μ:

(1) $\qquad \mathfrak{X} = N + S, \quad$ where $\quad \mu(N) = 0 \quad$ and S is separable.

We shall prove that, roughly speaking, this problem is equivalent to the known *generalized problem of measure* of Banach [2]) (see Theorems III, IV and V). In particular the decomposition (1) is possible for every metric space $\mathfrak{X}$ for which the answer to Banach's problem is negative, e. g. for each $\mathfrak{X}$ of power $\aleph_1$.

Therefore, the results of this paper reduce, in practice, the examining of Borel measures in metric spaces to the separable case.

Two ideas play an essential part in our proofs: a certain method of Banach concerning measures in abstract sets and a theorem of Montgomery on non-separable metric spaces (see p. 135).

We wish to thank Professor B. Knaster, whose questions and remarks have contributed to the solution of the chief problem of this paper.

1. Lemmas on σ-finite measures. We shall establish two simple lemmas.

---

[1]) Presented to the Polish Mathematical Society, Wrocław Section, on October 30, 1947, and to the Warsaw Section on December 5, 1947.

[2]) See Banach et Kuratowski [2], Banach [1], Ulam [11], Marczewski [4], p. 308, Marczewski et Sierpiński [6], Sierpiński [9], p. 107.

Numbers in brackets refer to the bibliography at the end of the paper.