pour toute fonction continue $f(x)$ non identiquement nulle, l'existence d'un système orthogonal Φ tel que la série orthogonale de $f(x)$ par rapport à lui est presque partout divergente [52].

Les séries orthogonales de la forme $a_1\varphi_{n_1}(x)+a_2\varphi_{n_2}(x)+\dots$ présentent diverses singularités lorsque les suites d'indices $n_1, n_2, \dots$ sont suffisamment „raréfiées". Ce sont précisément les séries *lacunaires*, auxquelles Banach a appliqué, entre autres, ses méthodes opératives. Sous l'hypothèse que les fonctions $\varphi_\nu(x)$ sont bornées dans leur ensemble, il a montré par exemple (voir [43]) que, *pour des suites* $n_1, n_2, \dots$ *convenablement choisies, la condition* $a_{n_1}^2+a_{n_2}^2+\dots<+\infty$ *entraîne la convergence en moyenne de la série orthogonale lacunaire avec un exposant aussi élevé qu'on le veut.*

On ne peut pas juger les facultés créatrices de Banach que d'après ses travaux publiés. C'était un talent mathématique de grande taille qui, entraîné par un besoin interne, travaillait sans cesse, même pendant la maladie mortelle. Il n'attachait pas beaucoup d'importance à la prompte publication de ses résultats, toujours plein de nouvelles idées, toujours modifiant la direction de ses pensées et les problèmes qui l'intéressaient.

J'espère qu'on pourra reconstruire, à l'aide des notes qu'il a laissées, un certain nombre de ses résultats connus à ses collaborateurs intimes grâce aux entretiens personnels avec lui. L'année prochaine, l'édition des „Studia Mathématica" sera reprise. La tradition de Banach et de son école va être continuée. Ce sera alors le devoir — sinon le besoin de coeur — de ses disciples rescapés aux calamités de la guerre, que de publier l'héritage scientifique de leur maître.

SUR L'OEUVRE SCIENTIFIQUE DE STEFAN BANACH

II. THÉORIE DES FONCTIONS RÉELLES ET THÉORIE DE LA MESURE

PAR

E. MARCZEWSKI (WROCŁAW)

A côté du principal terrain de l'activité mathématique de Banach dont la récolte, représentée par sa thèse de doctorat [7], ses livres sur la théorie des opérations [36, 38] et ses articles aux „Studia Mathematica" de Lwów, lui a gagné la célébrité — l'oeuvre de ce maître embrasse tout le domaine de la théorie moderne des fonctions réelles. Ses mérites dans ce domaine ne sont point moindres. Une longue file de ses travaux sur la théorie des fonctions passe à travers les nombreux volumes des „Fundamenta Mathematicae" de Varsovie. Ils ne passaient jamais sans impression, ils apportaient toujours les plus hautes valeurs aux groupes de problèmes qu'ils concernaient.

Il y avait parmi eux des travaux de bien divers genre. Les uns naissaient par pure curiosité de savoir, les autres visaient les applications à des recherches d'ordre différent. Les uns frayaient de nouveaux chemins ou révélaient de nouvelles vérités, les autres apportaient des simplifications et des généralisations ou contenaient l'analyse approfondie des faits antérieurement connus. Les uns démontraient l'existence des êtres singuliers, tandis que les autres établissaient des théorèmes positifs.

Il n'est pas difficile — à ce qu'il paraît — d'expliquer cette diversité: l'intérêt que Banach avait pour les mathématiques était si varié et son talent tellement puissant que ce grand géomètre n'imposait à ses travaux aucune limitation et ne ménageait jamais ses efforts. L'avis qu'il proclamait était qu'on n'ait droit d'appliquer un théorème mathématique, sinon à condition d'avoir bien présente à l'esprit sa démonstration; autrement, on risquerait de n'avoir même pas la certitude d'une bonne compréhension de son énoncé. Aussi, conformément à ce principe, avait-il lui-même médité profondément tout raisonnement dont il se servait. C'est pourquoi ses manuels portent une empreinte si pénétrante de son *ungua leonis* et c'est pourquoi on lui doit tant des belles démonstrations de théorèmes connus, comme celle, par exemple, du théorème de Vitali sur les recouvrements [10], réproduite désormais constamment dans les cours [1]).

*

La théorie moderne des fonctions réelles, créée au début de notre siècle, se développe dans deux directions. La première est celle des problèmes liés aux notions de continuité et de limite. Tels sont avant tout les problèmes concernant la classification d'ensembles et de fonctions, entamés par les recherches de Borel et de Baire, poursuivis par celles de Souslin, Lusin, Sierpiński et autres. Les notions fondamentales y sont les ainsi dits ensembles boreliens, fonctions de Baire, catégorie et propriété de Baire, ensembles analytiques etc. La seconde direction — c'est la théorie moderne de la mesure, de l'intégration et de la dérivabilité. Elle a pour base la théorie de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue; celle de l'intégrale de Denjoy en est l'une des étapes ultérieures.

Les travaux de Banach appartiennent aux deux directions. Envisageons-les dans le même ordre, en commençant par la *classification de Borel-Baire.*

Suivant Borel, on classe les ensembles en partant des ensembles fermés et ouverts — désignés d'habitude par F et G respectivement — et en appliquant l'addition et la multiplication dénombrables (opérations σ et δ) transfiniment itérées:

$$\begin{array}{lllll} F, & F_\sigma, & F_{\sigma\delta}, & F_{\sigma\delta\sigma}, & \ldots \\ G, & G_\delta, & G_{\delta\sigma}, & G_{\delta\sigma\delta}, & \ldots \end{array}$$

Suivant Baire, on classe les fonctions en partant des fonctions continues et en répétant transfiniment le passage à la limite:

fonctions continues, fonctions de 1^e^ classe, de 2^e^ classe, ...

Lebesgue a établi la relation entre les deux classifications: pour qu'une fonction $f(x)$ soit de classe α de Baire, il faut et il suffit que, pour tout a, l'ensemble $\underset{x}{E}[f(x)<a]$ appartienne à la classe correspondante de Borel (à F_σ pour la classe 1, à $G_{\delta\sigma}$ pour la classe 2, et ainsi de suite).

[1]) Cf. p. ex. S. Saks, *Theory of the Integral,* Monografie Matematyczne 7, Warszawa-Lwów 1937 (photolithographié par Hafner, New York 1947), p. 109-111, et E. J. McShane, *Integration,* Princeton 1944, p. 366-372.

Les théorèmes démontrés par les créateurs de la théorie ne concernaient que les fonctions réelles de la variable réelle. Cependant, le développement de la théorie — en particulier les recherches sur les espaces de Banach — exigeait des généralisations de plus en plus avancées. Il fallait étendre ces théorèmes aux fonctions dont les arguments et les valeurs parcourent des espaces métriques arbitraires. Il arrivait parfois que les notions et les théorèmes étaient susceptibles d'une généralisation facile et directe. Mais il arrivait de beaucoup plus souvent qu'on était contraint de chercher des énoncés convenables et des terrains appropriés pour qu'il y soit possible de transplanter la théorie. C'est ce qui a été fait pour la théorie de Borel-Baire par Hausdorff, Banach et Kuratowski. Banach s'occupa particulièrement du théorème de Lebesgue qui vient d'être mentionné [32]. Il a démontré que:

1° si l'espace des valeurs de la fonction contient, pour tout couple de ses éléments, un arc simple qui les joint („connexité par arcs"), le théorème de Lebesgue subsiste;

2° si l'on n'admet comme hypothèse que la séparabilité de cet espace, le théorème de Lebesgue subsiste encore, à condition toutefois de modifier la classification de Baire: il faut prendre comme point de départ non pas les fonctions continues, mais les fonctions pour lesquelles tous les ensembles $\underset{x}{E}[f(x)<a]$ sont des F_σ.

Banach s'intéressait aussi à d'autres problèmes de classification [2]), surtout à l'époque où Kuratowski et Tarski avaient inventé leur méthode symbolique pour évaluer la classe borelienne ou projective d'ensembles et de fonctions (1931). Ces questions l'avaient intéressé particulièrement en ce qui concerne les ensembles linéaires dans les espaces du type (B) ou (F). Il a publié avec Kuratowski [3]) un travail commun sur ce sujet et énoncé l'hypothèse qui a été démontrée ensuite par Mazurkie-

[2]) Voir p. ex. E. Szpilrajn-Marczewski, *Sur un problème de M. Banach,* Fundamenta Mathematicae 15 (1930), p. 212-214.

[3]) D'après l'information de S. Mazur, Banach avait démontré d'une façon effective qu'il existe dans l'espace des suites (s) de Fréchet (pour la définition de cet espace voir [38], p. 10) des ensembles linéaires de classe borelienne arbitrairement élevée et linéaires analytiques non-boreliens. Ces résultats sont inédits.

wicz [4]), à savoir que les fonctions partout dérivables forment dans l'espace des fonctions continues un ensemble non-borelien (et qui est — comme il est aisé de montrer par la méthode symbolique — un complémentaire analytique), Mazurkiewicz disait en plaisantant que c'était bien le plus ancien ensemble non-borelien qui fût connu, puisqu'il l'était depuis Newton.

Parmi d'autres notions de la théorie des fonctions réelles, celles de *catégorie* et de *propriété de Baire* intéressaient Banach de plus d'un point de vue. Elles étaient, en effet, son outil fondamental de recherches en ce qui concerne la théorie des opérations dans les espaces du type (B) et des types plus généraux (F) et (G) (cf. [38], surtout les chapitres I, III, § 1, et V, § 1 et § 2). Mais voici un résultat important de Banach où la notion de catégorie n'est pas l'instrument, mais bien l'objet de recherches: dans tout espace métrique, même non séparable, tout ensemble qui est localement de I[e] catégorie en chacun de ses points est un ensemble de I[e] catégorie [31]. A juste titre Ulam souligne dans son beau article sur Banach [5]) l'ingéniosité de cette démonstration. Elle unit, en effet, la remarquable ingéniosité à la simplicité tout à fait étonnante: il est impossible de l'oublier. Mais la grandeur de Banach s'y manifeste encore autrement, à savoir par l'énoncé même de ce théorème. Sous l'hypothèse que l'espace est séparable, le théorème est trivial; il semble d'ailleurs n'avoir été jamais formulé. Sa grande importance se fait jour seulement dès qu'on cherche à transporter les notions de catégorie et de propriété de Baire dans le domaine des espaces non séparables (ce que Banach entendait faire en vue des applications à la théorie des opérations où l'hypothèse de séparabilité serait par trop gênante). Par la démonstration de ce théoréme, Banach avait en quelque sorte rompu la glace: la plupart des théorèmes sur la catégorie et sur la propriété de Baire n'exige plus cette hypothèse à l'heure actuelle [6]).

[4]) S. Mazurkiewicz, *Über die Menge der differenzierbaren Funktionen*, Fundamenta Mathematicae 27 (1936), p. 244-249.

[5]) cité par H. Steinhaus, ce fascicule, p. 77.

[6]) Voir [31], p. 397-398, E. Szpilrajn-Marczewski, *O mierzalności i warunku Baire'a (Sur la mesurabilité et la condition de Baire)*, Comptes rendus du I Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves à Varsovie 1929 (en polonais), p. 297-303, en particulier p. 299, et C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne 3, Warszawa-Lwów 1933, p. 43-57. Cf. aussi du même auteur *Quelques problèmes concernant les espaces métriques non séparables*, Fundamenta Mathematicae 25 (1935), p. 534-545, où la suppression de l'hypothèse de séparabilité dans d'autres théorèmes est atteinte par la méthode du mathématicien américain D. Montgomery. Quelques cas où la tâche est analogue restent cependant ouverts jusqu'à présent; voir les problèmes 2 et 3 de C. Kuratowski, ibidem, p. 545. ainsi que celui de A. Alexiewicz et W. Orlicz, P17, ce volume, p. 34.

Une application importante de la notion de catégorie de Baire est donnée par l'ainsi dite *méthode de catégorie*, c'est-à-dire par les démonstrations d'existence basée sur le théorème de Baire d'après lequel tout espace complet est de II[e] catégorie sur lui-même. L'idée de cette méthode est analogue à celle dont Cantor se servait dans les démonstrations d'existence à l'aide de la notion de puissance. Pour montrer que, dans un ensemble E, il existe un élément ayant une propriété donnée, on montre qu'il y a dans E — d'un certain point de vue — *plus* d'éléments que de ceux ayant ladite propriété. C'est ainsi qu'en comparant la richesse des ensembles en éléments du point de vue de leur puissance, Cantor avait établi l'existence des nombres transcendants, par exemple, par la seule constatation que l'ensemble de tous les nombres réels est indénombrable, tandis que celui des nombres algébriques n'est que dénombrable. Saks, en simplifiant une démonstration de Banach et Steinhaus [19], avait remarqué qu'on peut comparer les ensembles aussi du point de vue de leur catégorie; c'est évidemment possible toutes les fois que l'ensemble E est un espace métrique de II[e] catégorie sur lui-même, donc en particulier (en vertu du théorème précité de Baire) lorsqu'une métrique complète est définie dans E.

Après avoir contribué à la naissance de la méthode de catégorie, Banach est aussitôt devenu l'un des premiers qui l'ont appliquée et propagée. Il l'a utilisée dans sa monographie, dans le travail [34] et dans un autre, fait en commun avec Auerbach [35]. Il l'a appliquée avec succès pour démontrer l'existence de fonctions réelles ayant diverses singularités liées à la non-dérivabilité. La méthode de catégorie a été aussi appliquée dans le même domaine de recherches par d'autres auteurs (Mazurkiewicz, Kaczmarz, Saks, Jarník) et tout récemment Orlicz a atteint par cette méthode des résultats extrêmement généraux et qui paraissent définitifs en ce qui concerne les fonctions sans dérivée [7]).

[7]) W. Orlicz, *Sur les fonctions continues non dérivables*, Fundamenta Mathematicae 34 (1947), p. 45-60, *Sur les fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz généralisée (I)*, Studia Mathematica 10 (1948), p. 21-39.

Ajoutons en passant que divers auteurs ont appliqué la méthode de catégorie dans d'autres domaines de mathématiques, à savoir dans la théorie des fonctions de variables complexes, dans celle de la mesure, dans la topologie etc. [8])

Parmi les travaux de Banach qui appartiennent à la seconde direction du développement de la théorie des fonctions réelles, une série de beaux résultats datant de 1921-1926 relève de la *théorie de la dérivabilité et de l'intégrabilité*. Ces résultats sont devenus classiques et ont été incorporés dans les manuels [9]). Tel est le théorème de Banach d'après lequel l'ensemble des points où la dérivée d'une fonction est infinie est de mesure nulle [4] [10]); tels sont également ses résultats sur la mesurabilité de dérivées [6, 11] [11]), sur la variation et la continuité absolue de fonctions, sur l'ainsi dite condition (N) de Lusin et sur d'autres conditions importantes (S), (T_1) et (T_2), introduites et examinées par lui-même [14, 18, 21] [12]). Il a démontré en particulier [14] que la variation totale d'une fonction $f(x)$ quelconque dans un intervalle arbitraire est égale à l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} N(y)\,dy$, où $N(y)$ est le nombre fini (où l'infinité) des points x de cet intervalle pour lesquels $y=f(x)$ [13]).

Les années postérieures apportent également plusieurs travaux de Banach sur la mesure et l'intégrale, en particulier les travaux [44] et [48]. Les deux travaux sont fortement influencés par la théorie qui l'intéressait au plus haut degré: celle des opérations. Le premier de ces travaux est consacré à la mesure de Haar dans les groupes; l'idée essentielle y est de baser la démonstration d'existence sur le théorème de Mazur concernant l'existence de la limite généralisée, donc — au fond — sur le théorème concernant le prolongement de fonctionnelles linéaires. Le second travail contient une conception fort originale de l'intégrale

---

[8]) Parmi les travaux plus récents de ce genre, voir J. C. Oxtoby and S. Ulam, *Measure preserving homeomorphisms and metrical transitivity*, Annals of Mathematics 42 (1941), p. 874-920; cf. aussi W. Orlicz, *Sur la convergence uniforme des développements orthogonaux de fonctions bornées* (à paraître dans ce volume).

[9]) Voir, par exemple, la monographie précitée de S. Saks.

[10]) S. Saks, op. cit., p. 270-271.

[11]) ibidem, p. 112-114.

[12]) ibidem, p. 277-289.

[13]) ibidem, p. 280.

abstraite de Lebesgue qui y est considérée uniquement comme fonctionnelle, sans employer la mesure comme point de départ.

L'autre sujet qui fascinait Banach à toute période de son activité scientifique est l'ainsi dit *problème de la mesure*. C'est Lebesgue [14]) qui l'avait formulé: il s'agit d'assigner à *tout* ensemble E de nombres réels de l'intervalle $I=\langle 0,1\rangle$ un nombre $m(E)$ de façon que les conditions suivantes soient satisfaites:

1. $m(E_1+E_2+...)=m(E_1)+m(E_2)+...$ pour les suites d'ensembles disjoints *(additivité dénombrable)*,
2. $m(E_1)=m(E_2)$ pour tout couple E_1, E_2 d'ensembles superposables,
3. $m(I)=1$.

La mesure de Lebesgue satisfait à ces conditions, mais elle n'est pas définie pour *tous* les sous-ensembles de l'intervalle. On sait, grâce à la décomposition connue de Vitali, que le problème de Lebesgue se résout par la négative [15]). Hausdorff a donc proposé un problème plus faible où la condition d'additivité dénombrable est remplacée par celle d'*additivité finie:*

1*. $m(E_1+E_2)=m(E_1)+m(E_2)$ pour tout couple E_1, E_2 d'ensembles disjoints.

Il a montré [16]) que même le problème ainsi atténué admet la solution négative lorsqu'on remplace l'intervalle-unité I par le cube-unité de l'espace à 3 dimensions. Le problème analogue pour la droite et pour le plan est resté ouvert. Banach l'a résolu par l'affirmative dans son travail d'habilitation [9]; il en a donné plus tard une démonstration de forme différente dans sa monographie [38], p. 32.

Cette remarquable divergence entre les dimensions 1 et 2 d'une part et 3 de l'autre a eu pour l'effet que Banach était revenu sur le cas de l'espace à 3 dimensions, envisagé par Hausdorff. Il a trouvé avec Tarski [13] que les décompositions paradoxales de la sphère, employées par Hausdorff dans sa démonstration, pouvaient être poussées plus loin. Ce travail a apporté le théorème paradoxal d'après lequel la sphère est congruente

---

[14]) Cf. H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration*, Paris 1927, p. 110.

[15]) Voir, p. ex., F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 401.

[16]) op. cit., p. 469-472.

par décomposition finie à la réunion de deux sphères dont chacune est de volume égal à celui de la première. En d'autres mots: la sphère peut être décomposée en nombre fini des parties qui se laissent „recombiner" de manière à composer deux sphères exactement les mêmes. Il faut ajouter que Banach a établi à ce but un théorème auxiliaire sur les transformations biunivoques [12] [17]) et que ses travaux sur le problème de la mesure et sur les décompositions paradoxales ont été continués par les recherches de von Neumann, Tarski, Sierpiński et autres — recherches, qui sont poursuivies jusqu'à présent [18]).

Après avoir résolu le problème de la mesure posé par Hausdorff, Banach a formulé un autre problème: est-il possible d'assigner à tous les sous-ensembles du segment I une mesure $m(E)$ non triviale (s'annulant sur tous les ensembles à un point) et assujettie aux conditions 1 et 3? Il est évident que la suppression de la condition 2, la seule qui était de nature géométrique, a eu pour l'effet de déplacer le problème — appelé sous cette forme *problème généralisé de la mesure* — dans un autre domaine, à savoir dans celui de la théorie générale des ensembles, où il est devenu l'un des chapitres de la *théorie abstraite de la mesure*. Ce problème a été résolu négativement en 1929 par Banach et Kuratowski [24] à l'aide de l'hypothèse du continu. En appliquant certaines idées de Banach [30], Ulam a poussé plus loin les recherches relatives à ces questions [19]).

[17]) Pour les généralisations ultérieures voir A. Tarski, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 6 (1928), p. 132-133, B. Knaster, ibidem, p. 133-134 et R. Sikorski, ce fascicule, p. 140-144.

[18]) J. von Neumann, *Zur allgemeinen Theorie des Masses*, Fundamenta Mathematicae 13 (1929), p. 73-116; A. Tarski, *Über das absolute Mass linearer Punktmengen*, ibidem 30 (1938), p. 218-234, et *Algebraische Fassung des Massproblems*, ibidem 31 (1938), p. 47-66; W. Sierpiński, *Sur le paradoxe de MM. Banach et Tarski*, ibidem 33 (1945), p. 229-234 et *Sur le paradoxe de la sphère*, ibidem, p. 235-244; R. M. Robinson, *On the decomposition of spheres*, ibidem 34 (1947), p. 246-260. Tout récemment M. Sierpiński a établi un simple théorème qui permet de déduire directement la décomposition paradoxale due à Banach et Tarski de celle due à Hausdorff; voir W. Sierpiński, *Le paradoxe de Hausdorff et le paradoxe de Banach et Tarski*, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei (à paraître) et *Sur l'équivalence des ensembles par décomposition en deux parties*, Fundamenta Mathematicae 35 (à paraître).

[19]) S. Ulam, *Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre*, Fundamenta Mathematicae 16 (1930), p. 140-150.

L'énoncé par Banach du problème généralisé de la mesure s'est montré extrêmement fécond. Cherchant à le résoudre, Nikodym a développé une théorie abstraite de l'intégrale et établi un théorème qui est connu aujourd'hui sous le nom du théorème de Radon-Nikodym [20]). Par analogie au problème de Banach, Ulam et Tarski ont étudié des problèmes similaires pour l'additivité finie [21]).

Les questions liées au problème généralisé de la mesure ont occupé plusieurs auteurs [22]) et Banach lui-même s'intéressait à ces questions jusqu'à la fin de sa vie [23]).

Banach se passionnait aussi pour d'autres problèmes de la théorie abstraite de la mesure. Il a démontré en 1940 d'une manière extrêmement ingénieuse un théorème sur les mesures dans les ainsi dits *corps indépendants* [56]; il travaillait également à la construction d'un exemple qui aurait montré l'impossibilité de généraliser ce théorème [24]). Ces questions se prêtent mal a être traitées en détail dans un aperçu comme celui-ci; la démonstration dont il est question, ainsi que les autres problèmes et résultats inédits de Banach, attendent à être publiés prochainement (cf. par exemple son travail posthume [55]).

Il se plaisait à formuler en termes de la théorie de la mesure les problèmes en apparence fort étrangers à cette théorie. C'est ainsi, par exemple, qu'ayant résolu avec Knaster un problème proposé par Steinhaus sous le nom de celui du *partage pragmatique*, il a su en transformer aussitôt la solution en un nouveau théorème concernant les mesures [25]).

*

[20]) Voir p. ex. S. Saks, op. cit., p. 36.

[21]) S. Ulam, *Concerning functions of sets*, Fundamenta Mathematicae 14 (1929), p. 231-233, et A. Tarski, *Une contribution à la théorie de la mesure*, ibidem 15 (1930), p. 42-50.

[22]) Voir p. ex. E. Marczewski and R. Sikorski, *Measures in non separable metric spaces*, ce fascicule, p. 133-139, et les travaux de W. Sierpiński et A. Tarski qui y sont cités.

[23]) Voir [54], ce fascicule, p. 103-108, en particulier P21, p. 103.

[24]) Voir E. Marczewski, *Indépendance d'ensembles et prolongement de mesures*, ce fascicule, p. 122-132.

[25]) Voir Annales de la Société Polonaise de Mathématique 19 (1947), p. 228-231, en particulier p. 231.

Faisons, pour terminer, une petite digression. En 1940, dans les heures les plus sombres de l'occupation allemande de la Pologne, un autre mathématicien éminent, Wacław Sierpiński, envoyait clandestinement aux périodiques étrangers des succintes communications qui contenaient des théorèmes sans démonstrations et se terminaient par la formule très usuelle en apparence: „Les démonstrations de ces théorèmes paraîtront dans le journal *Fundamenta Mathematicae*"[26]). Cette brève formule sonnait alors comme un *credo*: que la Pologne survivera et que la mathématique polonaise renaîtra avec elle. Aujourd'hui „Fundamenta Mathematicae" réapparaissent depuis 1945, „Studia Mathematica" se redressent, anciennes éditions mathématiques reprennent leurs publications et nouvelles commencent à paraître.

De même que la reprise de cette activité éditoriale est pour nous l'expression de la renaissance de notre science en Pologne, la prochaine publication et la continuation des travaux de Stefan Banach témoigneront de ce fait que, malgré sa mort, son esprit créateur habite parmi nous.

[26]) Voir p. ex. W. Sierpiński, *Sur les bases dénombrables des familles de fonctions*. Pontifica Academia Scientiarum, Acta 4 (1940), p. 212.

SUR LES SUITES D'ENSEMBLES EXCLUANT L'EXISTENCE D'UNE MESURE

PAR

S. BANACH †

NOTE POSTHUME AVEC PRÉFACE ET COMMENTAIRE DE E. MARCZEWSKI

Préface. Banach et Kuratowski [1]) ont résolu en 1929 l'ainsi dit *problème généralisé de la mesure* (en admettant l'hypothèse du continu): ils ont démontré que toute mesure dénombrablement additive, définie dans le corps de tous les sous-ensembles d'un ensemble arbitraire X de puissance du continu, s'annule identiquement lorsqu'elle s'annule sur tous les ensembles à un élément. Il ne s'agit ici, comme aussi dans la suite, que des mesures finies.

Les mêmes auteurs ont remarqué plus tard que leur démonstration donne au fond un résultat plus précis (bien que non formulé explicitement), à savoir: l'existence d'une suite $\{E_n\}$ de sous-ensembles de X qui admet une infinité indénombrable d'atomes [2]) (non vides) et telle que

(○) toute mesure dénombrablement additive, définie dans le plus petit corps dénombrablement additif ayant les E_n pour éléments, s'annule identiquement lorsqu'elle s'annule sur chacun des atomes de la suite $\{E_n\}$.

L'étude des suites d'ensembles pourvues de la propriété (○) n'est pas facile. Banach se posait, par exemple, le problème suivant qui — autant que je sache — reste ouvert jusqu'à présent:

P 21. La somme de deux familles dénombrables dépourvues de la propriété (○) peut-elle avoir cette propriété?

[1]) S. Banach et C. Kuratowski, *Sur une généralisation du problème de la mesure*, Fundamenta Mathematicae 14 (1929), p. 127-131; cf. aussi ce volume, p. 100 et 133.

[2]) Pour la définition de l'atome voir p. ex. E. Szpilrajn-Marczewski, *The characteristic function of a sequence of sets and some of its applications*, Fundamenta Mathematicae 31 (1938), p. 207-223, en particulier p. 209 et 211. Cf. aussi la définition donnée plus loin, p. 104.