

C O M P T E S R E N D U S

IV CONGRÈS POLONAIS DE MATHÉMATIQUE

WROCLAW, 12-14 DÉCEMBRE 1946

I. Organisation du Congrès. La Section de Wrocław de la Société Polonaise de Mathématique a décidé le 12 octobre 1946 d'organiser en décembre de même année à Wrocław une académie commémorative en honneur du feu Stefan Banach et de proposer au Bureau de la Société d'y convoquer pour les mêmes jours l'assemblée générale de la Société, la première après la guerre. Cette initiative ayant été acceptée, le Bureau de la Section de Wrocław a résolu d'ajouter à son projet l'organisation d'une séance de deuil en mémoire des mathématiciens polonais victimes de la guerre et d'arranger plusieurs séances scientifiques comprenant les communications des participants. Toutes ces séances et solennités, réunies d'abord sous le nom de Conférence des Mathématiciens Polonais, ont été plus tard reconnues par la Société (le 30 mai 1947) comme *IV Congrès Polonais de Mathématique*¹⁾.

Le *Comité d'Organisation* élu par le Bureau de la Section de Wrocław ne comptait au début que trois membres: E. Marczewski (Président du Comité), S. Hartman et S. Drobot; mais aux travaux ultérieurs d'organisation participaient tous les professeurs, adjoints et assistants de mathématique de l'Université et École Polytechnique de Wrocław. Les fonctions ont été réparties comme suit: direction générale et organisation des séances scientifiques — E. Marczewski, suppléance du président et service du „Nouveau Livre Écossais” — M. Stark, correspondance

¹⁾ Le I Congrès a eu lieu à Lwów en 1927; ses travaux ont été publiés dans un volume spécial, *Księga Pamiątkowa Pierwszego Polskiego Zjazdu Matematycznego*, paru en français et en polonais comme Supplément aux Annales de la Société Polonaise de Mathématique (Cracovie 1929, VI+218 pages). Le II Congrès a délibéré à Wilno en 1931 (voir les mêmes Annales 10, 1932, p. 132-151) et le III Congrès — à Varsovie en 1937 (voir ibidem 16, 1938, p. 182-217). Le V Congrès a eu lieu à Cracovie en 1947 (voir ibidem le Compte rendu de ses travaux, à paraître) et le VI Congrès est projeté pour septembre 1948 à Varsovie. A tous les Congrès Polonais de Mathématique prennent part les mathématiciens étrangers invités par le Comité.

et finances — S. Hartman, organisation de la séance commémorative — W. Ślebodziński, celle de l'académie en mémoire de Stefan Banach — H. Steinhaus, soins des dames et publicité aux tableaux d'annonces — M. Nosarzewska, soins des membres étrangers — B. Knaster, cantonnement — S. Drobot, approvisionnement — A. Wilkoński, aménagement d'auditoires et de vestiaires — M. Warmus, *Secrétariat du Congrès*: Section A — Z. Moroń, Section B — J. Perkal, *Bureau des renseignements* — M. Nosarzewska, K. Radziejski et A. Wąsowiczówna. Enfin, B. Knaster s'est chargé de rédiger le compte rendu du Congrès.

La Section de Wrocław a adressé de sa part les invitations aux autres Sections de la Société (Cracovie, Łódź, Poznań et Varsovie), de même qu'aux centres mathématiques plus petits où, à cette époque, les Sections n'existaient pas encore (Université de Marie Curie-Skłodowska à Lublin, Université de Nicolas Copernic à Toruń, École Polytechnique à Gdańsk, École Polytechnique à Gliwice), à tous les professeurs de l'Université et École Polytechnique de Wrocław, aux autorités gouvernementales et municipales, à la presse etc. Les invitations spéciales de la part du Bureau de la Société ont été adressées aux mathématiciens étrangers: P. Alexandroff, A. Kolmogoroff et N. Lusin (Moscou), A. Denjoy (Paris), E. Čech et V. Jarník (Prague), dont les trois premiers ont exprimé par un télégramme particulièrement cordial leurs regrets de ne pas pouvoir participer au Congrès. Parmi les invités étrangers, G. Choquet, professeur de l'Institut Français séjournant alors à Cracovie, a pris également une part active aux séances et aux travaux du Congrès.

Les fonds nécessaires ont été accordés au Comité d'Organisation par le Ministère de l'Instruction Publique. E. Sucharda, alors Prorecteur de l'École Polytechnique de Wrocław, a mis à la disposition du Congrès l'aula et les auditoires du bâtiment central de l'École. Professeur K. Bocheński et Dr S. Krzysztowski ont offert au Congrès les quartiers collectifs à la Faculté de Médecine, et plusieurs professeurs de différentes facultés universitaires ont accepté de loger les invités chez eux. De sa part, le Cercle Physico-Mathématique d'Étudiants a prêté au Congrès son concours spontané et constant par maints services rendus au Comité d'organisation.

La presse de Wrocław, en particulier „Słowo Polskie”, publiait régulièrement des notices concernant la marche des travaux du Congrès et des articles sur la mathématique polonaise en général.

Le Comité d'Organisation a exprimé sa gratitude à tous ceux qui ont contribué ainsi à la réalisation de sa tâche.

II. Programme du Congrès. Au matin du 12 décembre, avant l'ouverture du Congrès, le professeur W. Sierpiński a fait sur l'invitation de la Faculté une leçon aux étudiants ²⁾.

Les délibérations du Congrès ont débuté le même jour à 16 h. Toutes les séances ont eu lieu à l'édifice central de l'École Polytechnique d'après le programme suivant:

- Le 12 décembre: 16 h. Séance de deuil,
16 h. 45 m. I^{es} séances des Sections.
- Le 13 décembre: 11 h. Académie en mémoire de S. Banach,
16 h. II^{es} séances des Sections.
- Le 14 décembre: 10 h. 30 m. Assemblée générale de la
Société Polonaise de Mathématique,
14 h. Déjeuner offert aux membres du
Congrès au restaurant „Pod Górale”,
16 h. 30 m. III^{es} séances des Sections.

III. Séance de deuil. Les paroles prononcées à l'ouverture de la séance par K. Kuratowski, Président de la Société Polonaise de Mathématique, et qui étaient en même temps celles d'ouverture du Congrès, ont donné un témoignage saisissant de l'énormité des pertes subies par la mathématique polonaise depuis 1939. Le pays a à déplorer la mort d'au moins 56 mathématiciens, c'est-à-dire environ deux tiers de ses forces scientifiques actives dans divers domaines des mathématiques. Les pertes en livres et manuscrits sont aussi irréparables. Ce Congrès est donc particulièrement important. La concentration des efforts et l'assistance de la part des mathématiciens étrangers sont des éléments indispensables pour une renaissance possible.

La Société Polonaise de Mathématique salue cordialement tous les participants du Congrès qui, sans craindre les fatigues du voyage, sont venus à Wrocław pour collaborer à cette oeuvre commune.

²⁾ Voir ce volume, p. 63.

Après une allocution vibrante par laquelle V. Jarník (Prague) a répondu à ces paroles, un discours de commémoration sur les mathématiciens de Varsovie a été prononcé par W. Sierpiński, celui sur les mathématiciens de Cracovie — par T. Ważewski et S. Gołąb, sur les mathématiciens de Lwów — par B. Knaster, sur les mathématiciens de Wilno — par L. Jeśmanowicz et sur les mathématiciens de Poznań — par Z. Butlewski.

Tous ces discours de commémoration, complétés des données plus détaillées sur la vie, l'activité scientifique et la mort de tout mathématicien qu'ils concernaient, seront publiés dans un livre à part qui se trouve en préparation sous la rédaction de F. Leja.

IV. Académie en mémoire de Stefan Banach. Cette séance solennelle, organisée par l'Université et École Polytechnique de Wrocław, la Société des Sciences et des Lettres de Wrocław et la Section de Wrocław de la Société Polonaise de Mathématique, a eu lieu dans l'aula de l'École Polytechnique sous la présidence du Recteur S. Kulczyński en présence des membres du Congrès, de la famille du défunt, de ses amis, des professeurs, d'étudiants et du public s'intéressant à la science. Les discours suivants ont été prononcés:

S. Kulczyński, *Discours d'ouverture.*

La mathématique polonaise a des traditions bien anciennes, mais elle est une science jeune par sa floraison. Elle doit son élan et ses succès remarquables des dernières dizaines d'années à quelques hommes, à quelques esprits créateurs qui par leur don divin, leur labeur et leur exemple personnel ont réussi d'allumer cette épidémie de création qui, par quelques bonds hardis, a élevé notre mathématique au poste d'un centre important de la pensée mathématique moderne.

Stefan Banach était bien l'un de ces illustres personnages. Il y a à peine seize mois que nous espérons encore voir l'activité de ce collègue si déploré, dont le début et l'épanouissement à Lwów ont été si brillants, se transférer ici, à Wrocław, au profit et à la gloire de la science polonaise. Hélas, le sort en a voulu autrement.

Il existe cependant des forces plus puissantes que la mort. Telle est l'attrait et l'exemple du génie. Le génie mathématique de Stefan Banach continuera longtemps à animer la pensée mathématique polonaise, à illuminer le chemin des champions de

cette science par l'échelle même de ses exploits et à contribuer au nouveau développement de la mathématique polonaise, que nous voyons aujourd'hui reprendre ses efforts après les ténébreuses années de la guerre.

C'est pourquoi, réunis au Congrès des Mathématiciens de la Pologne, qui est un festin des vivants, nous évoquons l'esprit de Stefan Banach pour qu'il s'asseye parmi nous. Je propose d'ouvrir la Séance Commémorative d'aujourd'hui par une minute de silence.

H. Steinhaus, *Souvenir de Stefan Banach* (voir ce fascicule, p. 74-80).

W. Orlicz et E. Marczewski, *Sur l'oeuvre scientifique de Stefan Banach* (voir ce fascicule, p. 81-92 et p. 93-102).

A. Denjoy, *Discours de clôture*.

Au nom de l'Université de Paris, j'ai l'honneur de témoigner ici combien mes collègues et moi-même avons été touchés de la pensée dont la Société Mathématique Polonaise s'est inspirée en nous demandant d'être présents par l'un de nous aux cérémonies où votre grand Corps savant se proposait de rendre un solennel hommage à la mémoire de ceux qu'elle a perdus depuis le 1^{er} septembre 1939 et particulièrement à la grande figure de votre illustre Banach. Votre désir de nous associer à vos terribles deuils prend pour nous une signification dépassant de très haut l'affirmation des liens doctrinaux unissant depuis bien des années les Écoles mathématiques de nos deux pays. Nous en sommes profondément émus parce que nous y voyons la marque des rapports d'attachement mutuel et personnel que les savants de nos deux nations ont dès longtemps noués entre eux. C'est bien l'instant de rappeler avec quelle sympathie le grand Banach était accueilli chez nous, où il se savait admiré et respecté. Il se plaisait à y séjourner. Nulle part plus qu'en France n'aura été ressentie l'horreur de ce nombre inouï de crimes commis par les tortionnaires nazis sur la personne des mathématiciens polonais. J'avais pour beaucoup d'entre eux les sentiments qu'on éprouve pour de vrais amis. Je ne peux évoquer leur souvenir sans une poignante tristesse.

Les savants français ont été pour la plupart, sauf de très rares exceptions, exempts des tortures physiques dont vos bourreaux vous ont abondamment meurtris. Notre vénéré Elie Cartan



a eu son fils, physicien, mis à mort en captivité allemande, peut-être non loin d'ici, et je vous demande la permission d'ajouter mentalement à votre long martyrologue le nom de cet enfant du grand géomètre.

V. Travaux des Sections. Les travaux scientifiques du Congrès ont été partagés entre deux Sections.

Section A. Analyse, Géométrie, Mécanique rationnelle.

Séance du 12. XII de 16 h, 45 m. à 19 h. 30 m. sous la présidence de W. Nikliborc.

1. F. Leja, *Sur une classe des fonctions homogènes et leur application*.

Soit

$$(1) \quad p_0, p_1, \dots, p_n$$

un système de $n+1$ points d'un ensemble fermé et borné E situé dans l'espace R_2 de deux variables complexes x et y . Désignons par x_i et y_i les coordonnées du point p_i , par x et y celles du point variable z et posons d'une façon générale

$$zp_k = \frac{1}{2}(xy_k - yx_k).$$

Formons les $n+1$ polynômes homogènes

$$(2) \quad T_n^{(i)}(z, p_0, p_1, \dots, p_n) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{zp_k}{p_i p_k} \quad \text{pour } i=0, 1, \dots, n$$

et ensuite la borne inférieure $T_n(z)$ du plus grand des modules des polynômes (2) lorsque, n et z étant fixes, les points (1) varient arbitrairement dans E . En formule:

$$T_n(z) = \inf_{p_0, p_1, \dots, p_n \in E} \{ \max_i |T_n^{(i)}(z, p_0, p_1, \dots, p_n)| \}.$$

On sait ³⁾ que si l'écart de l'ensemble E par rapport à l'origine des coordonnées est positif, la suite $\{\sqrt[n]{T_n(z)}\}$ tend en chaque point z de l'espace R_2 vers une fonction-limite

$$\theta(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{T_n(z)}.$$

³⁾ F. Leja, Annales Acad. Polonaise des Sc. Techn. 7 (1939-1945), p. 1-10.

La fonction $\theta(z) = \theta(x, y)$ est homogène du degré 1 par rapport aux coordonnées x et y du point z et dépend de l'ensemble E .

L'auteur a communiqué quelques résultats concernant la continuité de $\theta(z)$ et l'application de cette fonction à l'étude du domaine de convergence des séries de Taylor des fonctions de deux variables réelles ou complexes.

2. S. Gołab, *Sur la notion de dérivée covariante*.

Après avoir rappelé la genèse de la notion de dérivée covariante pour les champs de vecteurs, d'affineurs et d'autres objets géométriques de 1^e classe, l'auteur envisage le problème de possibilité de définir la dérivée covariante pour les champs d'objets géométriques de II^e classe. Dans le cas particulier d'objets à une seule composante, la réponse au problème est négative. Incidemment, l'auteur a obtenu un résultat positif, à savoir en restreignant le groupe des transformations au groupe unimodulaire. Il a réussi alors de définir la dérivée covariante des objets de II^e classe (même de deux manières essentiellement différentes).

3. T. Wazewski, *Exemple d'un groupe de transformations de classe C essentiellement à 4 paramètres de la droite en elle-même* (le résumé va paraître aux Annales de la Soc. Polonaise de Math. 20 (1948), Comptes rendus des séances des Sections).

Séance du 13. XII de 17 h. à 19 h. 30 m. sous la présidence de F. Leja.

4. W. Nikliborc, *Une remarque sur le problème de 3 corps*.

Admettons que tous couple des trois points m_1, m_2, m_3 (de masses arbitraires) s'attire avec une force agissant le long de la droite qui les unit, avec l'intensité qui ne dépend que de leur distance. Envisageons le mouvement de ce système par rapport à un système de coordonnées $Oxyz$, par rapport auquel le centre de masses est en repos. Considérons pour ce mouvement le plan invariant de Laplace

$$ax + by + cz = 0,$$

où a, b et c sont les constantes de la conservation des champs et admettons que

$$T = +\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} > 0.$$

Désignons par $M(t)$ le plan dans lequel les points en question se trouvent au moment t , par $n(t)$ la normale à ce plan orientée arbitrairement et par λ, μ, ν les cosinus directeurs de cette normale.

A l'aide des formules données par l'auteur ⁴⁾ pour les composantes de la vitesse, on obtient les relations suivantes:

$$\frac{d\lambda}{dt} = Q\nu - R\mu, \quad \frac{d\mu}{dt} = R\lambda - P\nu, \quad \frac{d\nu}{dt} = P\mu - Q\lambda,$$

où

$$P = \frac{MT}{4m_1m_2m_3D^2} (m_1d_1x_1 + m_2d_2x_2 + m_3d_3x_3),$$

$$Q = \frac{MT}{4m_1m_2m_3D^2} (m_1d_1y_1 + m_2d_2y_2 + m_3d_3y_3),$$

$$R = \frac{MT}{4m_1m_2m_3D^2} (m_1d_1z_1 + m_2d_2z_2 + m_3d_3z_3),$$

$M = m_1 + m_2 + m_3$ étant la masse totale du système, D — l'aire du triangle formé par les points matériels considérés, d_k — la distance entre le point m_k et le plan invariant, enfin x_k, y_k et z_k — les coordonnées du point m_k ($k = 1, 2, 3$).

5. J. Bonder, *Contribution à la théorie des intégrales d'équations des vibrations forcées de systèmes élastiques avec amortissement intérieur et extérieur*.

Nombreux problèmes de la théorie des vibrations forcées de systèmes élastiques „à 1 dimension”, à savoir: des vibrations transversales d'une corde et de celles d'une colonne d'air, des vibrations longitudinales et de celles de torsion de barres, d'arbres etc., conduisent aux équations différentielles de la forme:

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - q(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -Q(x, t).$$

Aussi les vibrations transversales de barres se laissent ramener à des équations semblables, mais d'ordre plus élevé:

$$(2) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[p(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] + q(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Q(x, t).$$

⁴⁾ dans un ouvrage à paraître dans Prace Matematyczno-Fizyczne et dont le résumé est sous presse dans Acta Astronomica.

Dans ces équations, la variable x désigne l'abscisse, t — le temps, $u(x, t)$ — les déplacements cherchés d'éléments du système envisagé par rapport à son état d'équilibre, soumis à l'action de la charge extérieure $Q(x, t)$; enfin, $p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions — positives par leur nature-même — qui caractérisent respectivement les propriétés élastiques et dynamiques du système. Notons que les fonctions $Q(x, t)$, $p(x)$ et $q(x)$ n'ont dans l'intervalle considéré $a \leq x \leq b$ que tout au plus un nombre fini des points de discontinuité de 1^{re} espèce. En outre, $Q(x, t)$ est le plus souvent une fonction périodique du temps, grâce à quoi il suffit, en la développant en série de Fourier, de ne considérer qu'une seule des harmoniques. Admettons donc qu'on a dans l'équation (1) ou (2):

$$(3) \quad Q(x, t) = q(x) \sin \omega t.$$

Bien entendu, les intégrales cherchées doivent vérifier, outre les équations différentielles, certaines conditions-limites aux extrémités de l'intervalle $a \leq x \leq b$ et les conditions initiales pour $t = 0$.

On construit dans la théorie des vibrations la solution cherchée $u(x, t)$ le plus volontiers en superposant l'une sur l'autre une suite d'intégrales particulières dont chacune satisfait aux conditions-limites, mais dont une seule — qui exprime les vibrations forcées synchrones à la charge extérieure — vérifie l'équation donnée (1) ou (2), pendant que les autres sont des intégrales particulières des équations homogènes qui se déduisent de (1) ou (2) en y supprimant le second membre $Q(x, t)$ (et qui expriment par conséquent les vibrations libres du système). Cependant, les anciennes conceptions de cette méthode manquaient — comme on sait — de rigueur en ce qui concerne le mode de manier les séries fonctionnelles correspondantes, et surtout dans certains cas plus compliqués. C'est à peine que la théorie des équations intégrales et des développements en séries de „fonctions fondamentales” permet d'établir une rigueur complète dans ce domaine.

Néanmoins, il y subsiste encore une lacune causée par la négligence de l'amortissement des vibrations. Et cependant c'est un point bien essentiel autant pour la théorie que pour la technique des vibrations, notamment lorsqu'il s'agit d'analyser avec un peu plus d'exactitude le phénomène de la résonance. De telles

recherches exigent qu'on complète les équations (1) et (2) tout au moins par deux termes convenablement construits — ce qui entraîne évidemment des complications analytiques. Comme elles sont de même nature pour les équations (1) et (2), il suffit d'envisager p. ex. l'équation (1) en se bornant d'ailleurs à en chercher une seule intégrale particulière, à savoir celle qui exprime les vibrations synchrones à (3). Ainsi complétée, et en tenant compte de l'hypothèse simplificatrice (3), l'équation (1) prend la forme:

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \kappa \frac{\partial}{\partial x} \left[p(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right] - \mu q(x) \frac{\partial u}{\partial t} - q(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -q(x) \sin \omega t,$$

où les constantes κ et μ désignent respectivement les coefficients d'amortissement intérieur et extérieur.

Si l'on voulait imiter les anciennes méthodes d'intégration, mentionnées tout à l'heure — à savoir, sans analyser, pour le moment, la convergence des séries obtenues de manière purement formelle par un choix convenable de coefficients indéfinis, pas plus que la loi de différentiation itérée de ces séries terme à terme — on pourrait déterminer l'intégrale particulière cherchée pour l'équation (4) d'une façon relativement facile sous la forme du développement en série de fonctions fondamentales du système vibrant donné:

$$(5) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n \frac{(\lambda_n - \omega^2) \sin \omega t - \omega(\kappa \lambda_n + \mu) \cos \omega t}{(\lambda_n - \omega^2)^2 + \omega^2(\kappa \lambda_n + \mu)^2} y_n(x).$$

Les coefficients c_n , les valeurs caractéristiques λ_n et les fonctions fondamentales $y_n(x)$, qui figurent dans ce développement, peuvent être déterminés de diverses manières, par exemple au moyen des relations (17) et (14) ou (13), dont il sera question dans la suite.

Le développement (5) embrasse évidemment, comme cas particulier, aussi les vibrations non amorties ($\kappa = \mu = 0$ sous la restriction que $\omega^2 \neq \lambda_n$). Il y a toutefois entre ces résultats, qui concernent les vibrations avec et sans amortissements, une différence capitale au point de vue analytique, à savoir que dans le cas général des vibrations amorties la solution (5) possède — du

moins provisoirement — un caractère problématique, tandis que dans le cas de vibrations non amorties on peut, par contre, obtenir d'une manière parfaitement rigoureuse le développement (5) correspondant. En effet, déjà la simple hypothèse

$$(6) \quad u(x, t) = y(x) \sin \omega t$$

réduit dans ce cas l'équation aux dérivées partielles (4) à l'équation ordinaire

$$(7) \quad [p(x)y'(x)]' + \omega^2 \varrho(x)y(x) = -q(x)$$

avec les mêmes conditions-limites que les primitives, c. à d. au „problème aux limites” typique, qui trouve dans la théorie des équations intégrales sa meilleure solution.

Au contraire, lorsque $\kappa \neq 0$ ou $\mu \neq 0$, cette voie échoue complètement, car la fonction cherchée $u(x, t)$ ne se laisse pas représenter dans ce cas sous forme du produit $y(x)\psi(t)$. On peut cependant montrer sans difficulté que le développement (5) est parfaitement correct aussi dans ce cas général — c'est ce qui constitue précisément le but principal de la communication présente.

Il suffit de s'appuyer dans la démonstration sur les propriétés convenables des développements liés avec le problème simplifié (7).

Considérons à ce but la fonction symétrique de Green $G(x, \xi)$ déterminée d'une manière connue par le „problème aux limites” (7). Formons à l'aide de cette fonction l'équation intégrale de Fredholm de II^e espèce, équivalente à ce problème:

$$(8) \quad y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) \varrho(\xi) y(\xi) d\xi + h(x) \quad (\lambda = \omega^2),$$

où

$$(9) \quad h(x) = \int_a^b G(x, \xi) q(\xi) d\xi.$$

Notons d'emblée aussi la relation suivante, qui en résulte:

$$(10) \quad [p(x)h'(x)]' = -q(x).$$

On sait que les équations intégrales à noyau symétrique ont plusieurs propriétés particulièrement avantageuses. Bien qu'en vérité le noyau $G(x, \xi)\varrho(\xi)$ de l'équation intégrale (8) n'est pas encore symétrique, il suffit d'en multiplier les deux membres par $\sqrt{\varrho(x)}$ et d'introduire la nouvelle fonction inconnue

$$(11) \quad z(x) = y(x) \sqrt{\varrho(x)}$$

pour obtenir l'équation à noyau symétrique

$$(12) \quad K(x, \xi) = G(x, \xi) \sqrt{\varrho(x)\varrho(\xi)}$$

à laquelle s'appliquent déjà les théorèmes connus de Hilbert et de Schmidt sur la suite des valeurs caractéristiques positives λ_n et sur les développements en fonctions fondamentales $z_n(x)$ correspondant à ces valeurs et constituant un système orthogonal. Ces fonctions sont les solutions uniques de l'équation intégrale homogène:

$$(13) \quad z_n(x) = \lambda_n \int_a^b K(x, \xi) z_n(\xi) d\xi \quad n = 1, 2, \dots$$

et les fonctions fondamentales $y_n(x) = z_n(x)/\sqrt{\varrho(x)}$ liées avec elles (mais ne formant pas de système orthogonal) satisfont en outre à l'équation différentielle homogène:

$$(14) \quad [p(x)y'_n(x)]' + \lambda_n \varrho(x)y_n(x) = 0.$$

A l'aide du système de ces fonctions on peut déjà exprimer (sous la réserve que $\lambda \neq \omega^2 \neq \lambda_n$) la fonction cherchée $y(x)$ dans la forme:

$$(15) \quad y(x) = h(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n - \lambda} y_n(x)$$

où

$$(16) \quad h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)$$

et

$$(17) \quad c_n = \int_a^b h(x) \varrho(x) y_n(x) dx = \frac{1}{\lambda_n} \int_a^b q(x) y_n(x) dx.$$

En substituant la série (16) dans (15), on obtient la deuxième forme du développement de la fonction $y(x)$ qui diffère de la première en ce que cette fonction s'y trouve décomposée en fonctions fondamentales sans aucun résidu:

$$(18) \quad y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n c_n}{\lambda_n - \lambda} y_n(x).$$

Sous les hypothèses admises, toutes les séries qui précèdent sont absolument et uniformément convergentes dans l'intervalle considéré.

Il est ensuite à remarquer que la formule (5) devient dans le cas de $x=\mu=0$ identique à la série (18) multipliée seulement par le facteur $\sin \omega t$ (avec $\lambda \equiv \omega^2$). Il en résulte aussitôt la convergence absolue et uniforme de la série (5) dans le cas général, car — comme on vérifie aisément — la présence dans cette série des constantes κ et μ ne fait qu'„accélérer” sa convergence.

Enfin, le développement (5) satisfait manifestement aux conditions aux limites car toutes les fonctions fondamentales $y_n(x)$ leur satisfont. Par suite, il ne reste qu'à montrer qu'il satisfait aussi à l'équation de départ (4).

Or, cela exige qu'on établisse au préalable la légitimité de la différentiation itérée terme à terme des séries correspondantes, c.-à-d. la commutativité des opérations $\sum_{n=1}^{\infty}$ et $R(rv) \equiv [p(x)rv'(x)]'$.

Dans sa démonstration, un point essentiel est que cette commutativité se présente — comme on le déduit en comparant les formules (15) et (18) — pour le développement (15) de la fonction $y(x)$ avec la fonction $h(x)$ dégagée, tandis que le développement (18) peut en être dépourvu par suite de la présence du facteur supplémentaire $\lambda_n \rightarrow \infty$. C'est pourquoi il est nécessaire de transformer le développement (5) en y détachant une fonction proportionnelle à $h(x)$ — fonction qui exprimerait la partie „presque statique” des déplacements du système vibrant examiné. A ce but, on n'a qu'à soustraire les expressions

$$\frac{c_n y_n(x)}{1 + \kappa^2 \omega^2} (\cos \omega t - \kappa \omega \sin \omega t)$$

des termes correspondants de la série (5); les calculs donnent:

$$(19) \quad u(x, t) = \frac{1}{A} \left[h(x) \sin(\omega t + \theta_0) + \omega \sqrt{\omega^2 + \mu^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{D_n} y_n(x) \sin(\omega t + \theta_n) \right],$$

où

$$(20) \quad \begin{cases} A = \sqrt{1 + \kappa^2 \omega^2}, & D_n = \sqrt{(\lambda_n - \omega^2)^2 + \omega^2 (\kappa \lambda_n + \mu)^2}, \\ \sin \theta_0 = \frac{-\kappa \omega}{A}, & \cos \theta_0 = \frac{1}{A}, \\ \sin \theta_n = \frac{\kappa \omega^2 \sqrt{\omega^2 + \mu^2}}{A D_n} \left[1 - \left(2 + \frac{\mu}{\kappa \omega^2} - \kappa \mu \right) \frac{\lambda_n}{\omega^2 + \mu^2} \right], \\ \cos \theta_n = \frac{\omega \sqrt{\omega^2 + \mu^2}}{A D_n} \left[-1 + (1 - \kappa^2 \omega^2 - 2 \kappa \mu) \frac{\lambda_n}{\omega^2 + \mu^2} \right]. \end{cases}$$

La comparaison des termes correspondants des séries (15) et (19) montre aussitôt que le développement (19) jouira de la commutativité des opérations $\sum_{n=1}^{\infty}$ et R . En conséquence, on constate moyennant le simple calcul (quoiqu'un peu encombrant), mais sans plus de difficultés essentielles — et n'ayant à tenir compte que de l'égalité (10) et des formules (20) — que le développement (19) satisfait en effet à l'équation (4).

Ainsi, la fonction envisagée $u(x, t)$ constitue non seulement dans la forme du développement (5), mais aussi dans celle du développement (19), une solution correcte du problème posé. De plus, si $\kappa \neq 0$ ou $\mu \neq 0$, la restriction $\lambda \equiv \omega^2 \neq \lambda_n$ est de trop, ce qui rend possible justement une analyse plus précise des phénomènes de la résonance.

6. Z. Butlewski, *Sur les intégrales bornées du système d'équations différentielles linéaires ordinaires.*

Soient

$$(1) \quad x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$$

les intégrales complexes du système d'équations linéaires ordinaires

$$\frac{dx_i}{dt} + \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) x_k = f_i(t) \quad i=1, 2, \dots, n,$$

où les coefficients $a_{ik}(t)$ pour $k=1, 2, \dots, n$, ainsi que $f_i(t)$, sont des fonctions complexes continues de la variable complexe t avec $t \geq |t_0| > 0$ et $\arg t = \omega = \text{const.}$

Théorème. Si l'on a pour $i=1, 2, \dots, n$ et $k=1, 2, \dots, n$

$$(2) \quad \int_{|t_0|}^{+\infty} |a_{ik}(t)| |dt| < +\infty \quad \text{et} \quad (3) \quad \int_{|t_0|}^{+\infty} |f_i(t)| |dt| < +\infty,$$

les modules des fonctions (1) sont bornés pour $|t| \rightarrow +\infty$ et $\arg t = \omega = \text{const.}$

En particulier, si l'on a pour $i=1, 2, \dots, n$ et $k=1, 2, \dots, n$ les relations (2) et

$$(4) \quad f_i(t) \equiv 0,$$

les modules des fonctions (1) sont bornés et ne tendent pas tous vers 0 pour $|t| \rightarrow +\infty$ et $\arg t = \omega = \text{const.}$

Séance du 14. XII de 17 h. 15 m. à 19 h. sous la présidence de F. Leja.

7. V. Jarník, *Quelques remarques sur la géométrie des nombres.*

Communication des résultats récents de M. Knichal (voir V. Knichal, *Sur une généralisation d'un théorème de MM. Blichfeldt et Visser dans la géométrie des nombres*, Časopis pro pěstování Matematiky a Fysiky 71 (1946), p. 33-44 et *Sur la distribution des mesures sur une sphère à n dimensions*, ibidem, p. 45-54).

8. Z. Charzyński, *Sur les fonctions extrémales dans les familles de fonctions univalentes* (voir Prace Matematyczno-Fizyczne, à paraître).

Soit $f(z)$ une fonction univalente (c'est-à-dire telle que $f(z_1) \neq f(z_2)$ pour $z_1 \neq z_2$) de la forme

$$(1) \quad f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots = a_1 (z + A_2 z^2 + \dots) \quad \text{où } a_1 > 0 \text{ et } |z| < 1.$$

Appelons-la, pour abréger, *bornée* si $|f(z)| < 1$ pour tout z .

Comme on sait, les quotients des coefficients $a_k/a_1 = A_k$, où $k=2, 3, \dots$, sont assujettis pour les fonctions univalentes — les seules dont il sera question dans la suite — à diverses restrictions et ne peuvent pas prendre de valeurs arbitraires indépendamment l'un de l'autre.

La bien connue *hypothèse des coefficients* de Bieberbach donne lieu au problème plus général suivant:

Soit pour un entier $N \geq 2$ fixé arbitrairement

$$H(X_2, X_3, \dots, X_N, Y_2, Y_3, \dots, Y_N)$$

une fonction réelle quelconque de $2N-2$ variables réelles, définie dans une région suffisamment grande et y admettant les dérivées partielles continues qui ne s'y annulent nulle part simultanément. Posons pour toute fonction (1):

$$A_k = \lambda_k + i\mu_k \quad (k=2, 3, \dots)$$

et

$$(2) \quad H_f = H(\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_N, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_N).$$

Ainsi formée, H_f est une fonctionnelle définie dans la famille de toutes les fonctions (1). Or, F étant une famille quelconque de fonctions (1), existe-t-il dans F une fonction extrémale $f^*(z)$ —

ou une classe de telles extrémales — pour laquelle la fonctionnelle correspondante H_{f^*} atteint sa valeur maximum dans F ? Quelles sont les conditions (nécessaires) satisfaites par telles fonctions $f^*(z)$?

La réponse dépendra évidemment de la nature de la famille F et ne pourra être donnée que dans des cas particuliers. Les résultats de l'auteur sont les suivants:

I. Pour les familles F_T . Soit F_T où $0 < T < 1$ la famille de toutes les fonctions univalentes bornées de la forme (1), assujetties à la condition $a_1 \geq T$. Certaines méthodes variationnelles permettent de démontrer ce théorème fondamental:

Théorème I. Il existe dans toute famille F_T des fonctions extrémales $f^(z)$ pour lesquelles la fonctionnelle (2) atteint dans F_T la valeur maximum. Chacune de ces extrémales satisfait pour $0 < |z| < 1$ à l'équation*

$$(3) \quad \left[\frac{f^{*'}(z)}{f^*(z)} \right]^2 \Re[f^*(z)] = \frac{1}{z^2} \Re(z),$$

où

$$\Re(w) = \left[\sum_{p=2}^N \frac{\mathfrak{D}_{p-1}}{w^{p-1}} + \overline{\mathfrak{D}_{p-1}} w^{p-1} \right] - 2\mathfrak{P}^*,$$

$$\Re(z) = \left[\sum_{p=1}^N \frac{\mathfrak{E}_{p-1}}{z^{p-1}} + \overline{\mathfrak{E}_{p-1}} z^{p-1} \right] - 2\mathfrak{P}^*,$$

$$(4) \quad f^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* z^n, \quad a_k^*/a_1^* = \lambda_k^* + i\mu_k^* \quad \text{pour } k=2, 3, \dots,$$

$$(5) \quad [f^*(z)]^p = \sum_{n=p}^{\infty} a_n^{*(p)} z^n,$$

$$(6) \quad H_n^* = H'_{X_n}(\lambda_2^*, \lambda_3^*, \dots, \lambda_N^*, \mu_2^*, \mu_3^*, \dots, \mu_N^*) - i H'_{Y_n}(\lambda_2^*, \lambda_3^*, \dots, \lambda_N^*, \mu_2^*, \mu_3^*, \dots, \mu_N^*),$$

$$(7) \quad \begin{cases} \mathfrak{D}_{p-1} = 2 \sum_{n=p}^N a_n^{*(p)} H_n^* & (p=2, 3, \dots, N), \\ \mathfrak{E}_0 = \sum_{n=2}^N (n-1) a_n^* H_n, \quad \mathfrak{E}_{p-1} = 2 \sum_{n=p}^N (n-p+1) a_{n-p+1}^* H_n^* & (p=2, 3, \dots, N), \\ \mathfrak{P}^* = \min_{0 \leq x < 2\pi} \Re \left\{ \sum_{p=1}^N \mathfrak{D}_{p-1} e^{ix(p-1)} \right\}. \end{cases}$$

Les fonctions $\mathfrak{M}(w)$ et $\mathfrak{N}(z)$ ne prennent sur les circonférences $|w|=1$ et $|z|=1$ respectivement que des valeurs réelles non négatives et chacune de ces fonctions y admet au moins une racine double. Enfin, le coefficient a_1^* du développement de toute fonction extrémale est égal à T .

II. Pour la famille F^1 . Soit F^1 la famille de toutes les fonctions univalentes (pas nécessairement bornées) de la forme

$$F(z) = z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots$$

On déduit du théorème I par un passage convenable à la limite dans l'équation (3) les formules analogues pour les fonctions extrémales de la famille F^1 :

Théorème II. Il existe dans la famille F^1 au moins une fonction extrémale $F^*(z)$ satisfaisant pour $0 < |z| < 1$ à l'équation ⁵⁾

$$(8) \quad \left[\frac{F^{*'}(z)}{F^*(z)} \right]^2 \mathfrak{M}^*[F^*(z)] = \frac{1}{z^2} \mathfrak{N}^*(z),$$

où

$$\mathfrak{M}^*(w) \equiv \sum_{p=2}^N \frac{\mathfrak{D}_{p-1}}{w^{p-1}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{N}^*(z) \equiv \sum_{p=1}^N \frac{\mathfrak{G}_{p+1}}{z^{p+1}} + \mathfrak{G}_{p-1} z^{p-1},$$

les coefficients $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \dots, \mathfrak{D}_{N-1}$ et $\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1, \dots, \mathfrak{G}_{N-1}$ étant déterminés par les formules (4)-(7) dans lesquelles a_n^* est à remplacer par le coefficient correspondant du développement de la fonction $F^*(z)$.

Il est à remarquer que la thèse du théorème II est plus restreinte que celle du théorème I, car elle n'affirme point que toute fonction extrémale $F^*(z)$ satisfait à l'équation (8).

9. W. Ślebodziński. Quelques remarques sur l'application des invariants intégraux à l'intégration des équations différentielles (à paraître dans *Prace Matematyczno-Fizyczne*).

⁵⁾ Cette équation a été trouvée par une voie différente par A. C. Schaeffer et D. C. Spencer d'abord pour le cas particulier où

$$H(X_2, \dots, X_N, Y_2, \dots, Y_N) = \sqrt{X_N^2 + Y_N^2}$$

(voir *Duke Mathematical Journal* 10 (1943), p. 612) et puis pour la fonction H arbitraire (voir *ibidem* 12 (1945), p. 124 et *Proceedings of the National Academy of Sciences* 32 (1946), p. 113).

Section B. Logique mathématique, Théorie des ensembles, Théorie des fonctions, Topologie.

Séance du 12. XII de 17 à 19h. sous la présidence de W. Sierpiński, dont l'allocution de bienvenue, adressée aux participants étrangers à l'ouverture de la séance, a été suivie d'une belle réponse de V. Jarník en langue tchèque.

1. G. Choquet, *Opérations dans les espaces topologiques*.

Développement d'idées résumées dans la Note de l'auteur intitulée *Prolongement d'homéomorphismes. Ensembles topologiquement nommables. Caractérisation topologique individuelle des ensembles fermés totalement discontinus*, *Comptes rendus Acad. Sc. Paris* 219 (1944), p. 542.

2. H. Steinhaus, *Sur le partage pragmatique* (résultats communs de l'auteur, de S. Banach et de B. Knaster, à paraître dans les *Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Wrocław*, 1, 1946-1948).

3. E. Marczewski, *Une généralisation de la mesure relative*.

I. Désignons par X la demi-droite positive $x \geq 0$, par X_n — l'intervalle $0 \leq x \leq n$ et par E — un ensemble mesurable (L) situé sur X . Si la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} (|E \cdot X_n| : n)$ existe, on dit que E est *relativement mesurable* et on appelle cette limite *mesure relative de E* ⁶⁾.

Une notion analogue peut être introduite également pour les mesures abstraites. Soit d'une façon générale μ une mesure dénombrablement additive, définie dans un corps dénombrablement additif K de sous-ensembles d'un ensemble X . Admettons que $\mu(X) = \infty$, mais qu'il existe une suite $\{X_n\}$ d'ensembles satisfaisant aux conditions suivantes:

$$(1) \quad X = X_1 + X_2 + \dots, \quad X_1 \subset X_2 \subset \dots, \quad 0 < \mu(X_n) < \infty.$$

Si la limite

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [\mu(E \cdot X_n) : \mu(X_n)]$$

existe pour un $E \in K$, l'ensemble E s'appellera *relativement mesurable* par rapport à la mesure μ et à la suite $\{X_n\}$. La limite (2) sera dite *mesure relative de E* et désignée par $\mu_R(E)$.

⁶⁾ Cf. M. Kac et H. Steinhaus, *Sur les fonctions indépendantes (IV) Intervalle infini*, *Studia Mathematica* 7 (1938), p. 1-15, en particulier p. 1.

II. Fixons maintenant la mesure μ . Il est évident que $\{Y_n\}$ étant une suite partielle, extraite de $\{X_n\}$, tout ensemble E relativement mesurable par rapport à $\{X_n\}$ l'est aussi par rapport à $\{Y_n\}$, et que la valeur de $\mu_R(E)$ est la même.

Appelons la suite $\{X_n\}$ *régulière* si tout ensemble relativement mesurable par rapport à $\{X_n\}$ l'est aussi par rapport à toute suite satisfaisant aux conditions (1) et dont $\{X_n\}$ est une suite partielle. Il est aisé de montrer que

Pour qu'une suite $\{X_n\}$ soit régulière, il faut et il suffit que l'on ait $\mu(X_{n+1} - X_n) : \mu(X_n) \rightarrow 0$.

Par conséquent, dans le cas où X est le plan et μ — la mesure plane de Lebesgue, la suite $\{C_n\}$ des cercles $|z| \leq n$ et la suite $\{Q_n\}$ des carrés $|x| \leq n, |y| \leq n$ sont régulières.

III. La valeur de la mesure relative dépend du choix de la suite $\{X_n\}$, même lorsqu'il s'agit des ensembles fort simples. Dans le cas du plan, soit A l'ensemble des points dont les coordonnées polaires (r, φ) satisfont à la condition $-\pi/6 < \varphi < \pi/6$. On voit aisément que la mesure relative de A est égale à $1/6$ par rapport à la suite $\{C_n\}$ et à $1/4\sqrt{3}$ par rapport à la suite $\{Q_n\}$. Cet exemple est dû à M. E. Otto.

IV. Évidemment, la mesure relative n'est pas dénombrablement additive: on a $\mu_R(X_n) = 0$, tandis que $\mu_R(X) = 1$. Mais en utilisant un raisonnement de M. Wecken⁷⁾, on parvient à montrer que la mesure relative est presque-dénombrablement additive, c'est-à-dire que pour toute suite $\{E_n\}$ d'ensembles disjoints et relativement mesurables, il existe une suite $\{E_n^*\}$ telle que

$$1^\circ \mu_R[(E_n - E_n^*) + (E_n^* - E_n)] = 0,$$

$$2^\circ \mu_R(E_1^* + E_2^* + \dots) = \mu_R(E_1^*) + \mu_R(E_2^*) + \dots$$

4. S. Hartman, *Sur la base statistique des fonctions périodiques et presque périodiques* (voir *Studia Mathematica* 10 (1948), à paraître).

Soit $f(x)$ une fonction réelle définie sur une demi-droite. On appelle *distributrice* de $f(x)$ la fonction

$$\varrho(f, a) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|E[f(x) < a] \cdot \langle 0, T \rangle|}{T}.$$

⁷⁾ F. Wecken, *Über abstrakte Integrale und fastperiodische Funktionen*, *Mathematische Zeitschrift* 45 (1939), p. 377-404, en particulier p. 391.

Etant donné un système Σ formé de m fonctions $f_1(x), \dots, f_m(x)$, on définit parcelllement sa distributrice:

$$\varrho(\Sigma, a_1, \dots, a_m) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|E[f_1(x) < a_1, \dots, f_m(x) < a_m] \cdot \langle 0, T \rangle|}{T}.$$

Admettons que, pour un $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $T(\varepsilon)$ tel qu'on a respectivement pour tout intervalle I dont la longueur surpasse $T(\varepsilon)$ et pour toutes les valeurs de $a, a_1, \dots, a_m$:

$$\left| \frac{|E[f(x) < a] \cdot I|}{|I|} - \varrho(f, a) \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \frac{|E[f_1(x) < a_1, \dots, f_m(x) < a_m] \cdot I|}{|I|} - \varrho(\Sigma, a_1, \dots, a_m) \right| < \varepsilon.$$

Alors $T(\varepsilon)$ s'appelle *base statistique* (pour le nombre ε) de la fonction $f(x)$ ou du système Σ respectivement.

Toute fonction presque périodique au sens de Bohr et dont la distributrice est continue admet une base statistique pour tout $\varepsilon > 0$. Il en est de même pour les systèmes de fonctions périodiques aux fréquences linéairement indépendantes et aux distributrices continues.

Il s'agit d'évaluer pour tout $\varepsilon > 0$ la base statistique minimale. L'auteur y parvient à l'aide de la fonction $L(\eta)$ de Bohr définie comme il suit:

1^o Pour une fonction presque périodique $f(x)$. Il existe par définition pour tout $\eta > 0$ un nombre $L_f(\eta) > 0$ tel que tout intervalle ayant ce nombre pour longueur contient un nombre τ satisfaisant à l'inégalité $|f(x + \tau) - f(x)| < \eta$ pour tout x . On pose pour tout $\eta > 0$ par définition $L(f, \eta) = \min L_f(\eta)$.

2^o Pour un système Σ de fonctions périodiques. En vertu d'un théorème de Bohr⁸⁾, il existe pour tout $\eta > 0$ un nombre $L_\Sigma(\eta) > 0$ tel que tout intervalle ayant ce nombre pour longueur contient un nombre τ (une presque-période commune pour les fonctions de Σ) satisfaisant au système d'inégalités $|f_i(x + \tau) - f_i(x)| < \eta$ où $i = 1, \dots, m$ pour tout x . On pose pour tout $\eta > 0$ par définition $L(\Sigma, \eta) = \min L_\Sigma(\eta)$.

⁸⁾ H. Bohr, *Fastperiodische Funktionen*, Berlin 1932, p. 31.

Quant à l'évaluation de la fonction de Bohr elle-même, l'auteur y réussit dans le cas d'une fonction presque périodique qui est somme de deux fonctions périodiques dont le rapport ϑ des fréquences est irrationnel (le cas de ϑ rationnel étant banal), donc aussi dans le cas du système de $m=2$ fonctions presque périodiques de ce genre. $L(\Sigma, \eta)$ dépend alors du développement de ϑ en fraction continue et l'évaluation pour tout η donné n'exige qu'un développement partiel de ϑ . L'algorithme euclidien peut y être évité lorsque l'ensemble des dénominateurs du développement est borné et que la borne est connue. Dans ce cas, on peut donner pour l'évaluation de la base statistique une formule directe.

Séance du 13. XII de 16 à 19h. 30m. sous la présidence de S. Straszewicz.

5. A. Denjoy, *Les ensembles rangés*.

G. Cantor a créé une source de grande confusion dans la théorie des nombres transfinis en disant qu'un type d'ordre est un nombre ordinal et que, par exemple, la manière de ranger les éléments d'un ensemble dénombrable à la façon des entiers positifs croissants est le nombre ω .

On peut considérer que, dans un ensemble ordonné E , un élément a possède un rang déterminé quand la section commençante $C(a, E)$ de E ayant a pour dernier élément n'est semblable à aucune autre section $C(b, E)$. Il suffit d'ailleurs pour cela que la condition soit vérifiée pour les seuls éléments b antérieurs à a . Dans ce cas, toute notation ou appellation permettant de désigner ce rang pourra être assimilée à un nombre ordinal.

J'appelle *ensemble rangé* tout ensemble ordonné dont deux sections commençantes quelconques sont dissemblables, comme c'est le cas pour les ensembles bien ordonnés (ce qui explique la possibilité d'attribuer à chacun de leurs éléments un rang qualifié par un nombre ordinal fini ou transfini). Mais, la notion de nombre ordinal étant ainsi étroitement associée à celle de rang comme le nom à l'objet qu'il désigne, la notion de nombre ordinal ne pourrait être confondue (à tort d'ailleurs) avec celle de type d'ordination que si l'ensemble des types des sections commençantes d'un ensemble rangé quelconque était semblable à cet ensemble (comme c'est le cas de la bonne ordination).

Effectivement, on montre que: d'une part, les types $T[C(E)]$ des sections commençantes $C(E)$ de l'ensemble rangé E forment un ensemble rangé H , que l'on peut appeler l'ensemble des *types de rangement* attaché à E ; d'autre part, il est aisé de constater que H est en général dissemblable à E .

Ainsi, Q étant un ensemble parfait linéaire dont les segments contigus sont énumérés en $u_1, u_2, \dots$, si E est constitué dans chaque u_n par n points et si le reste de E , quand il existe, est indifféremment réparti sur Q , E est rangé et toujours dissemblable à H .

Le cas où les deux ensembles E et H sont semblables, le seul où le quasi-nombre ordinal pourrait être regardé (bien fâcheusement) comme désignant un type d'ordination, est celui où E est du type suivant:

$$\tau(p) + \sum_{n=-1}^{n=-\infty} \tau(\omega^{\delta_n}) \times p_n + (O_1),$$

$\tau(p)$ étant un type fini, les δ_n (exposants ordinaux de Cantor) décroissant quand n négatif croît, les p_n — nombres entiers finis positifs. (O_1) est l'ensemble des nombres de Cantor ou un segment de cet ensemble (d'un type ultérieur à tous les $\tau(\omega^{\delta_n})$).

Il convient donc, pour tout ensemble bien ordonné, d'attacher à chacun de ses éléments le nombre ordinal qualifiant son rang et d'éviter toute confusion de sens entre le nombre ordinal et le type de bonne ordination. Si l'on admet le prolongement sans fin des nombres ordinaux, selon la conception de Cantor, le théorème de Zermelo se rattache immédiatement à ce lemme⁹⁾:

$\bar{\omega}$ désignant la puissance d'un ensemble infini déterminé E et $S_{\bar{\omega}}^-$ l'ensemble de tous les nombres ordinaux susceptibles de marquer un rang d'élément dans un ensemble bien ordonné de puissance au plus égale à $\bar{\omega}$, la puissance de $S_{\bar{\omega}}^-$ ne peut pas être au plus égale à $\bar{\omega}$.

Sinon, on voit immédiatement que le plus petit nombre ordinal supérieur à tous ceux de $S_{\bar{\omega}}^-$ serait encore dans $S_{\bar{\omega}}^-$, ce qui est absurde. Dès lors, si l'on admet l'axiome du choix, les éléments M_α de E se définissent successivement pour les nombres α croissants. Et M_α ne peut pas exister quel que soit α dans $S_{\bar{\omega}}^-$.

⁹⁾ A. Denjoy, Comptes rendus Acad. Sc. Paris 213 (1941), p. 432 et Énumération transfinie I, Gauthier-Villars 1946, p. 110.



Donc E finit par être bien ordonné (M_α cesse d'exister à partir d'un certain rang β).

6. K. Kuratowski, *Sur la projectivité des ensembles singuliers*.

D'après K. Gödel, l'hypothèse du continu est compatible avec le système d'axiomes de la Théorie des ensembles. Plus encore: on peut admettre que la relation $x \prec y$ qui range l'ensemble des nombres réels en une suite transfinie du type Ω se laisse définir de façon que l'ensemble (plan) des points xy satisfaisant à cette relation soit *projectif* (au sens de N. Lusin). De la dernière hypothèse l'auteur déduit, dans le domaine d'ensembles projectifs, l'existence de divers ensembles „singuliers”, tels que les ensembles *toujours de 1^{re} catégorie* de Lusin, ensembles à propriétés λ, ν, σ etc.¹⁰⁾. La classe des ensembles projectifs se montre ainsi bien plus vaste qu'on ne pourrait croire jusqu'à présent.

7. A. Mostowski, *Sur une relation projective qui ordonne bien le continu*.

Esquisse d'une démonstration du théorème suivant établi par M. Gödel¹¹⁾:

Si les axiomes de la théorie des ensembles ne sont pas contradictoires, ils le restent avec l'axiome supplémentaire que voici:

Il existe une relation binaire $\prec$ qui ordonne bien le continu linéaire et qui est projective de classe PCA (c'est-à-dire que l'ensemble $\bigcup_{xy} [x \prec y]$ est de cette classe).

8. T. Ważewski, *Sur l'évaluation du domaine d'existence des fonctions implicites dans les espaces abstraits* (voir le résumé dans les Comptes rendus des séances des Sections, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 20 (1948), à paraître).

9. S. Jaśkowski, *Sur le problème de décision de la topologie et de la théorie des groupes*.

L'auteur réduit le problème de décision (*decision problem, Entscheidungssproblem*) du calcul restreint des prédicats — appelé

¹⁰⁾ Pour les définitions de ces notions, voir C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne, Warszawa - Lwów 1933, §36.

¹¹⁾ K. Gödel, *Proceedings Nat. Acad. Sc. U.S.A.* 25 (1939), p. 220 - 224.

ici *système P* — au problème de décision de certaines classes d'expressions de la topologie et de la théorie des groupes¹²⁾.

Les abréviations que j'emploie sont les suivantes:

$f\{ \}$ remplace la fonction mathématique formée de symboles qui se trouvent entre $\{ \}$.

$S\{ \}$ remplace l'expression signifiante qui peut contenir des fonctions du calcul des propositions et des symboles placés entre $\{ \}$.

$Eq(R)$ remplace l'expression symbolique qui veut dire „ R est une relation transitive et symétrique”.

$Cart(R_1, R_2, R_3)$ veut dire:

$$Eq(R_1) \& Eq(R_2) \& Eq(R_3) \& (x)(y)(z) \{R_1(x, x) \& R_2(y, y) \& R_3(z, z) \rightarrow \\ \rightarrow (Et) [R_1(x, t) \& R_2(y, t) \& R_3(z, t)]\}.$$

$Trans(R_1, R_2, R_3, A)$ veut dire:

$$(x)(y) [R_1(x, y) \& R_2(x, y) \& R_3(x, y) \& A(x) \rightarrow A(y)].$$

I. Réductions logiques. Les règles du sens du système *P* doivent être énoncées de façon que l'opérateur (quantificateur) général puisse précéder chaque expression signifiante, même si elle contient un opérateur de la même forme, par exemple:

$$(x) [(x)F(x) \rightarrow (x)G(x)].$$

On a les théorèmes:

(1) *Le problème de décision de P se réduit à la classe d'expressions*

$$S\{(x), (y), (z), A(x, y, z)\}.$$

(2) *Le problème de décision de P se réduit à celui de réalisation de la classe d'expressions*

$$Cart(R_1, R_2, R_3) \& Trans(R_1, R_2, R_3, A) \& \\ \& S\{(x), (y), R_1(x, y), R_2(x, y), R_3(x, y), A(x)\}.$$

¹²⁾ Ces recherches ont été commencées avant la guerre de 1939. On en trouve mention dans le mémoire: J.C.C. McKinsey and A. Tarski, *The Algebra of Topology*, *Annals of Mathematics* 45 (1944), p. 190.

II. Réductions à la topologie. En modifiant légèrement le principe de la dualité logico-topologique de MM. Kuratowski et Tarski¹³), on établit la correspondance entre l'opérateur (x) et l'opération topologique $\mathcal{K} \times \prod_x A$. Introduisons la notation $P_x(A)$ pour cette opération. On a les théorèmes:

(3) Le problème de décision de P se réduit à celui de la classe d'égalités topologiques

$$f\{+, -, P_x, P_y, P_z, A\} = 0,$$

où $+$ et $-$ sont respectivement les signes d'addition et de complétion d'ensembles, 0 est celui d'ensemble vide et A est la variable représentant l'ensemble.

(4) Le problème de décision de P se réduit à celui de la classe d'expressions

$$S\{(p), (q), \dots; U, U_B, U_C, D; p, q, \dots; \epsilon\},$$

où $U_A(p, q)$ désigne la relation topologique „les points p et q appartiennent à la même composante (c'est-à-dire: sous-ensemble connexe saturé) de l'ensemble A ”.

III. Réductions à la théorie des groupes. Soient: $+$ le signe de l'opération du groupe, $-$ celui d'élément inverse, $X, Y, \dots$ ceux d'éléments du groupe et $H, K, M, N, \dots$ ceux de leurs ensembles. On a le théorème:

(5) Le problème de décision de P se réduit à celui des expressions

$$S\{+, -, =, \epsilon; (X), (Y), \dots; X, Y, \dots; H\}$$

dans la théorie des groupes et à celui des expressions

$$S\{+, -, =, \epsilon; (X), (Y), \dots; X, Y, \dots; H, K, M, N\}$$

dans la théorie des groupes abéliens.

Séance du 14. XII de 17h.45m. à 20h.30m. sous la présidence de K. Kuratowski.

10. W. Sierpiński, *Les correspondances multivoques et l'axiome du choix* (voir Fundamenta Mathematicae 34, 1947, p. 39-44).

¹³) C. Kuratowski et A. Tarski, *Les opérations logiques et les ensembles projectifs*, Fundamenta Mathematicae 17 (1931), p. 241-248.

11. A. Alexiewicz et W. Orlicz, *Contribution à la théorie des fonctions abstraites*.

Soit X un espace de Banach. Un ensemble $\mathcal{E}_0$ de fonctionnelles linéaires $\xi(x)$ définies dans X est dit *fondamental* si, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $x \in X$, il existe une combinaison linéaire

$$\xi = a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_n \xi_n$$

d'éléments $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ de $\mathcal{E}_0$ telle que

$$(i) \quad \|\xi\| \leq 1, \quad (ii) \quad \xi(x) \geq \|x\| - \varepsilon.$$

$\mathcal{E}_0$ désignant désormais un ensemble fondamental de fonctionnelles linéaires définies dans X , soit U un espace métrique complet.

Une fonction $x(u)$ définie dans U à contredomaine dans X est dite *faiblement continue relativement à $\mathcal{E}_0$* [de classe α faible relativement à $\mathcal{E}_0$] si, quelle que soit la fonctionnelle $\xi(x)$ de $\mathcal{E}_0$, la fonction réelle $\xi(x(u))$ est continue [est de classe α].

Théorème 1. Toute fonction faiblement continue relativement à $\mathcal{E}_0$ [de classe $\alpha > 0$ faible relativement à $\mathcal{E}_0$] et dont le contredomaine est séparable est de classe 1 [de classe $\alpha + 1$].

En particulier, toute fonction faiblement continue relativement à $\mathcal{E}_0$ et ayant le contredomaine séparable est donc continue en chaque point d'un ensemble résiduel.

Théorème 2. Toute fonction de classe $\alpha > 0$ faible relativement à $\mathcal{E}_0$ et ayant le contredomaine compact est de classe α .

Théorème 3. Si une suite de fonctions $\{x_n(u)\}$ de classe α faible relativement à $\mathcal{E}_0$ et dont les contredomaines sont séparables converge avec $n \rightarrow \infty$ vers une fonction $x(u)$, la fonction $x(u)$ est de classe $\alpha + 1$.

En particulier pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire les fonctions $x_n(u)$ étant faiblement continues relativement à $\mathcal{E}_0$, la fonction-limite $x(u)$ est continue en tout point d'un ensemble résiduel. On peut montrer que de telles fonctions $x_n(u)$ sont elles-mêmes continues en tout point d'un ensemble résiduel.

Théorème 4. $U_1, U_2, \dots, U_n$ étant des espaces métriques complets, toute fonction $x(u_1, u_2, \dots, u_n)$ faiblement continue relativement à $\mathcal{E}_0$ (par rapport à chacune des variables $u_1, u_2, \dots, u_n$ séparément) et ayant le contredomaine séparable situé dans X est au plus de classe n ; de plus, elle est continue en tout point d'un ensemble résiduel.

Comme application de ces théorèmes, on en obtient qui concernent les fonctions réelles:

Théorème 5. U_1 étant un espace métrique complet et U_2 compact, soit $f(u_1, u_2)$ une fonction réelle continue en u_2 pour tout u_1 de U_1 et en u_1 pour tout u_2 d'un ensemble dense dans U_2 . Alors la projection de l'ensemble des points de discontinuité de f sur U_1 est de 1^e catégorie.

Théorème 6. Il en est de même, U_1 étant un espace métrique complet et U_2 celui des nombres réels, si la fonction f est continue en u_2 pour tout u_1 de U_1 et si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_1^{(n)} = u_1^{(0)} \text{ entraîne } \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_1^{(n)}, u_2) = f(u_1^{(0)}, u_2)$$

(lim as désignant la limite en mesure).

Les théorèmes 5 et 6 se laissent étendre, en vertu du théorème 4, aux fonctions de plusieurs variables. On obtient ainsi une généralisation du théorème de Hahn.

Considérons une équation différentielle $y' = f(x, y)$ où f est une fonction continue quelconque. Soit $\bar{y}(x; x_0, y_0)$ l'intégrale supérieure de cette équation passant par le point x_0, y_0 . On sait que cette intégrale n'est pas en général continue comme fonction des valeurs initiales. Or, on déduit du théorème 2 ce

Théorème 7. L'intégrale supérieure $\bar{y}(x; x_0, y_0)$, considérée comme fonction des valeurs initiales, est continue en chaque point d'un ensemble résiduel.

On peut déduire aussi des théorèmes 1-4 quelques propositions concernant les fonctions à n -ième puissance sommable.

12. R. Sikorski, Topologie des limites transfinies.

Appelons corps algébrique de caractère ω_μ (ce nombre étant transfini initial régulier) tout corps algébrique ordonné dont chaque élément est de caractère $(\omega_\mu, \omega_\mu^*)$ au sens de la théorie des ensembles.

Tel est par exemple le plus petit corps algébrique contenant l'ensemble P_μ des nombres ordinaux inférieurs à ω_μ et ayant pour opérations algébriques l'addition et la multiplication naturelles au sens de Hessenberg¹⁴).

¹⁴ Cf. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, 3-me édition, Berlin 1935, p. 68.

Dans un corps algébrique A de caractère ω_μ , on peut toujours définir la notion de *limite* pour les suites transfinies $\{a_\xi\}$ de type ω_μ d'éléments de A , donc aussi la fonction de *fermeture* $\bar{X}$ pour les sous-ensembles X de A qui satisfasse aux axiomes suivants:

- I. $\sum_{\xi < \alpha} \bar{X}_\xi = \bar{X}_\alpha$, quelle que soit la suite transfinie $\{X_\xi\}$ du type $\alpha < \omega_\mu$ de sous-ensembles de A .
- II. $X = \bar{X}$ pour X vide ou formé d'un élément.
- III. $\bar{X} = \bar{\bar{X}}$.

Appelons d'une façon générale *espace topologique* $\aleph_\mu$ -additif tout ensemble $\mathcal{X}$ où une fonction $\bar{X}$ est définie pour tout $X \subset \mathcal{X}$ de façon que les axiomes I-III soient remplis.

Appelons d'autre part *espace* ω_μ -métrique tout ensemble $\mathcal{X}$ où une fonction $\varrho(p, q)$ est définie dont les variables p et q parcourent tous les éléments de $\mathcal{X}$ et dont les valeurs appartiennent à un corps algébrique de caractère ω_μ , les axiomes habituels de la distance étant vérifiés:

- (1) $\varrho(p, q) = 0$ équivaut à $p = q$.
- (2) $\varrho(p, q) + \varrho(p, r) \geq \varrho(q, r)$.

Dans un espace ω_μ -métrique $\mathcal{X}$, on peut toujours définir la notion de *limite* pour les suites transfinies $\{p_\xi\}$ du type ω_μ de points de $\mathcal{X}$, donc aussi la *fermeture* d'ensembles, tout comme dans les espaces métriques ordinaires. Alors l'espace ω_μ -métrique devient un espace topologique $\aleph_\mu$ -additif.

On montre qu'en modifiant d'une manière convenable les définitions des notions topologiques, à savoir en y remplaçant les suites et les ensembles dénombrables par les suites du type ω_μ et par les ensembles de puissance $\aleph_\mu$, un bon nombre de théorèmes topologiques s'étendent sur les espaces $\aleph_\mu$ -additifs et ω_μ -métriques. Cette méthode de modification des définitions se montre particulièrement utile dans l'étude des espaces topologiques de puissances élevées. Évidemment, des singularités viennent apparaître avec $\mu > 0$ qui méritent également d'être étudiées.

Convenons de dire qu'un corps algébrique de caractère ω_μ possède la *propriété BW* (Bolzano-Weierstrass), si toute suite $\{a_\xi\}$ du type ω_μ de ses éléments admet une suite partielle du même type qui est convergente. L'auteur démontre que tout corps

algébrique du caractère ω_μ (donc de puissance $\aleph_\mu$) possède la propriété BW , et que si un corps algébrique quelconque A possède la propriété BW , le corps algébrique qui en est la *fermeture linéaire*¹⁵⁾ jouit aussi de la propriété BW .

13. S. Kulczyński, *Sur quelques applications des notions topologiques à la biologie*.

L'auteur attire l'attention sur l'insuffisance des conceptions finitistes élémentaires pour traiter avec rigueur plusieurs notions biologiques fondamentales et expliquer certaines propriétés des êtres vivants qui ne se laissent en vérité interpréter que dans le domaine d'ensembles infinis. L'instrument efficace de les étudier serait fourni par les notions et méthodes contemporaines de la théorie des ensembles et de la topologie, en premier lieu par celles de correspondance biunivoque, d'espace, de point d'accumulation et de continuité d'une fonction.

C'est ainsi par exemple que la correspondance entre le germe et l'organisme qui s'en développe et qui le contient, de même que celle entre les gamètes de deux sexes et la cellule à laquelle elles donnent naissance par l'acte de fécondation, est une propriété n'appartenant qu'aux ensembles infinis (correspondance biunivoque entre la partie et le tout).

La notion classique d'espèce, dont les prétendues définitions sont notoirement insoutenables, ne semble pas se prêter à une définition rigoureuse, sinon, à l'aide de la notion topologique de point d'accumulation. On n'a qu'à former un espace cartésien à autant de coordonnées qu'il y a de caractères à étudier chez une population donnée d'êtres vivants pour en faire la classification, et de faire correspondre à chaque individu le point de l'espace ayant pour coordonnées précisément les valeurs numériques des caractères mesurés chez cet individu. L'essaim de points ainsi obtenus présentera d'habitude certaines régions de densité où l'on peut déterminer les ainsi dits points d'accumulation par divers procédés mathématiques (le choix du procédé qui convienne le mieux aux besoins des naturalistes constituant un problème à part). La notion d'espèce est alors à entendre comme l'être idéal correspondant au point d'accumulation considéré et ses ca-

¹⁵⁾ Cf. B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra I*, Berlin 1930, p. 227 („reell abgeschlossener Körper“).

ractères sont déterminés par la valeur des coordonnées de ce point. Il y a donc autant d'espèces dans une population qu'il y a de points d'accumulation dans sa représentation géométrique virtuelle; de plus, la distance entre eux et tout point-individu donné exprime numériquement de combien cet individu s'écarte de chacune des espèces en question — ce qui est bien irréalisable d'une façon correcte à l'aide de vagues notions usuelles.

La notion de continuité, convenablement conçue, permet de définir celle d'homologie des organes. Ce sujet a été traité par l'auteur dans sa conférence „Sur les hypothèses qui sont à la base de la morphologie comparée” à la séance publique de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres à Cracovie le 21 juillet 1945¹⁶⁾.

L'auteur insiste sur le fait que, dans cet ordre d'idées, on est en présence d'un important champ d'application des mathématiques aux sciences naturelles, trop peu usité jusqu'à présent, à savoir celui d'application des notions fondamentales des disciplines mathématiques les plus modernes aux notions fondamentales de la biologie.

VI. L'Assemblée générale de la Société Polonaise de Mathématique a été ouverte et présidée par K. Kuratowski, qui a salué par une courte allocution la formation d'une nouvelle Section de la Société (Section de Łódź) et son délégué E. Otto. L'Assemblée a voté entre autres les résolutions suivantes:

Le nombre actuel de mathématiciens en Pologne étant fort réduit, la Société croit utile de multiplier celui des Congrès et des Conférences par leur convocation plus fréquente.

La Société se prononce pour la formation d'une Union Internationale de Mathématique et charge le Bureau de la Société de prendre l'initiative en cette matière.

La Société estime qu'il y a nécessité immédiate de créer en Pologne des imprimeries scientifiques; la Société attache la plus grande importance au complètement urgent de l'outillage de l'Imprimerie de l'Université et École Polytechnique de Wrocław.

¹⁶⁾ S. Kulczyński, *O założeniach, jakie leżą u podstaw morfologii porównawczej*, Rocznik Polskiej Akademii Umiejętności, Rok 1939/1943, Kraków 1946 (en polonais), p. 119-133; cf. aussi E. Marczewski, *Sur l'homéomorphie des espaces et l'isomorphie des relations*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 21, à paraître.

VII. Le déjeuner a réuni à la table commune tous les membres du Congrès. E. Marczewski a pris la parole pour exprimer sa joie en face de l'affirmation de la vie intellectuelle — en particulier du Congrès mathématique — à Wrocław redevenu polonais, où il travaillait jusqu'à la fin de la guerre comme esclave capturé par les Allemands. Il a dédié en langue française des paroles particulièrement affectueuses au souvenir de l'ouvrier français Maurice Thierry, son compagnon d'esclavage, qui lui apportait du pain pendant le siège de la ville, et aux savants français qui, deux ans plus tard, apportent en cette ville les fruits de leur labeur scientifique. A. Denjoy et V. Jarník ont répondu très cordialement à ces paroles.

VIII. Liste des Membres du Congrès (les nombres indiquent les numéros des pages renseignant sur les discours prononcés et les communications faites):

1. A. Alexiewicz (Poznań)	179	25. E. Marczewski (Wrocław)	93, 171, 184
2. A. Bielecki (Cracovie)		26. Z. Marmol (Gliwice)	
3. J. Bonder (Gliwice)	161	27. Z. Moroń (Wrocław)	
4. J. Burzyński (Cracovie)		28. A. Mostowski (Varsovie)	176
5. Z. Butlewski (Poznań)	157, 167	29. W. Nikliborc (Varsovie)	160
6. Z. Charzyński (Varsovie)	168	30. M. Nosarzewska (Wrocław)	
7. G. Choquet (Paris)	171	31. W. Orlicz (Poznań)	81, 179
8. A. Ciopa-Śniatycki (Toruń)		32. E. Otto (Łódź)	
9. A. Denjoy (Paris)	158, 174, 184	33. J. Perkal (Wrocław)	
10. S. Drobot (Wrocław)		34. W. Sierpiński (Varsovie)	157, 171, 178
11. S. Gołąb (Cracovie)	157, 160	35. R. Sikorski (Varsovie)	180
12. H. Gruzewska (Varsovie)		36. M. Stark (Wrocław)	
13. S. Hartman (Wrocław)	172	37. H. Steinhaus (Wrocław)	74, 171
14. R. S. Ingarden (Wrocław)		38. S. Straszewicz (Varsovie)	
15. B. Iwaszkiewicz (Wrocław)		39. W. Ślebodziński (Wrocław)	170
16. V. Jarník (Prague)	157, 168, 171, 184	40. K. Szałajko (Gliwice)	
17. S. Jaśkowski (Toruń)	176	41. H. Szmuszkowiczówna (Łódź)	
18. L. Jeśmanowicz (Toruń)	157	42. B. Towarnicki (Gliwice)	
19. E. Karaśkiewicz (Poznań)		43. M. Warmus (Wrocław)	
20. B. Knaster (Wrocław)	157	44. A. Wilkoński (Wrocław)	
21. S. Kulczyński (Wrocław)	157, 182	45. T. Ważewski (Cracovie)	157, 160, 176
22. K. Kuratowski (Varsovie)	156, 176, 183	46. Z. Zahorski (Cracovie)	
23. F. Leja (Cracovie)	159	47. K. Zarankiewicz (Varsovie)	
24. S. Loria (Wrocław)		48. Z. Zawirski (Cracovie)	

SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE SECTION DE WROCLAW

SÉANCE DU 17 OCTOBRE 1947

R. Sikorski (Varsovie). *Sur la définition de l'intégrale dans les corps de Boole* (à paraître dans *Colloquium Mathematicum*).

SÉANCE DU 24 OCTOBRE 1947

H. Steinhaus. *Rapport du voyage aux États Unis* (cf. ce volume, p. 63).

SÉANCE DU 31 OCTOBRE 1947

E. Marczewski. *Mesures dans les espaces non séparables* (voir E. Marczewski and R. Sikorski, *Measures in non separable metric spaces*, ce fascicule, p. 133-139).

S. Hartman. *Remarques sur les fonctions périodiques* (à paraître dans ce volume).

SÉANCE DU 14 NOVEMBRE 1947

M. Warmus. *Remarques sur les développements systématiques des nombres rationnels*.

Propriétés des développements décimaux de certaines fractions, en particulier dont les dénominateurs sont des nombres premiers.

H. Steinhaus. *Séries potentielles à coefficients aléatoires*.
Les coefficients a_n de la série

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

sont supposés déterminés par un procédé aléatoire quelconque soumis à la seule condition que les choix soient indépendants. Il existe alors — comme on sait — un nombre R qui est le rayon de convergence de cette série avec la probabilité 1. Appelons-le le *vrai* rayon de convergence. La question se pose: existe-t-il sur la circonférence $|z|=R$ un ensemble Z de points singuliers qui puisse être appelé le *vrai ensemble singulier* de la série (1)?

La réponse est affirmative. Le vrai ensemble singulier peut se réduire à un seul point ou même coïncider avec la circonférence toute entière, mais il n'est jamais vide. Il existe toujours un nombre R' le plus grand, tel qu'en retranchant de la série

aléatoire (1) une série convenablement choisie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ à coefficients b_n fixés, la série aléatoire

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} r_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) z^n$$

ait son vrai rayon de convergence égal à R' . Au cours d'un entretien personnel avec l'auteur, M. D. Blackwell a présumé que le vrai ensemble singulier de la série (2) est identique à la circonférence $|z|=R'$. Une conséquence évidente de cette présomption est la représentabilité „canonique” de toute série potentielle aléatoire sous forme de la somme d'une série potentielle ordinaire et d'une série potentielle aléatoire admettant une vraie coupure; pour ne pas compliquer les énoncés, on y omet l'exception banale où (2) est un polynôme ¹⁾.

H. Steinhaus. *Sur un problème de S. Hartman concernant les fonctions périodiques* (à paraître dans ce volume).

SÉANCE DU 28 NOVEMBRE 1947

E. Marczewski. *Un théorème d'Ulam et les espaces absolument mesurables*.

L'espace métrique est dit *absolument mesurable* s'il est sous-ensemble absolument mesurable ²⁾ d'un espace complet. C'est ainsi, par exemple, que tout espace qui est sous-ensemble borelien ou, plus généralement, analytique d'un espace complet est absolument mesurable. A l'aide du théorème sur l'équivalence de mesures ³⁾ et du connu théorème de N. Lusin sur les fonctions mesurables, l'auteur établit la condition suivante, nécessaire et suffisante pour la mesurabilité absolue d'un espace métrique séparable quelconque X :

Quelle que soit la mesure borelienne ⁴⁾ finie μ , définie dans X , et quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact $C \subset X$ tel que $\mu(X - C) < \varepsilon$.

¹⁾ Tous ces résultats feront partie du livre: M. Kac et H. Steinhaus, *Independent Functions*, Monografie Matematyczne (à paraître).

²⁾ Pour la définition de la mesurabilité absolue d'ensembles, voir ce volume, p. 43, et le mémoire qui y est cité, p. 48 et 68.

³⁾ Ibidem, p. 56, théorème 4.1 (ii).

⁴⁾ Pour la définition de cette notion, voir ce fascicule, p. 111.

Ce théorème embrasse le résultat de M. Ulam ⁵⁾, qui a déduit la même condition de l'hypothèse que l'espace X est séparable et complet.

SÉANCE DU 6 DÉCEMBRE 1947

J. G. Mikusiński (Lublin). *Sur la méthode de généralisation de Laurent Schwartz et sur la convergence faible*.

F, Φ et C étant des ensembles quelconques, soit $f\varphi = c$ une composition faisant correspondre un $c \in C$ à tout couple f, φ où $f \in F$ et $\varphi \in \Phi$, et telle que si $f_1\varphi = f_2\varphi$ pour tout $\varphi \in \Phi$, on a $f_1 = f_2$.

Une convergence quelconque étant définie dans C , pourvu que l'on ait $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c_0$ lorsque $c_n = c_0$ pour $n = 1, 2, \dots$, une suite $\{f_n\}$ d'éléments de F sera dite *faiblement convergente* lorsque la suite $\{f_n\varphi\}$ converge pour tout $\varphi \in \Phi$. Désignons par $\widetilde{\lim}$ la limite faible et par $\check{F}$ la fermeture faible de F .

Une opération $r = R(f^1, \dots, f^k)$ définie intérieurement dans F sera dite *régulière* lorsque:

- 1° la convergence faible des suites $\{f_n^1\}, \dots, \{f_n^k\}$ entraîne celle de $r_n = R(f_n^1, \dots, f_n^k)$;
- 2° $\widetilde{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n^i = \widetilde{\lim}_{n \rightarrow \infty} g_n^i$ pour $(i = 1, \dots, k)$ entraîne $\widetilde{\lim}_{n \rightarrow \infty} R(f_n^1, \dots, f_n^k) = \widetilde{\lim}_{n \rightarrow \infty} R(g_n^1, \dots, g_n^k)$.

Les opérations régulières s'étendent univoquement sur $\check{F}$ et y conservent leurs propriétés. D'après une remarque de M. Cz. Ryll-Nardzewski, si l'ensemble C est un espace L^* ⁶⁾, toute opération qui satisfait à la condition 1° est régulière.

Soit en particulier:

F l'ensemble de toutes les fonctions $f(x)$ réelles définies pour tout x réel et sommables dans tout intervalle fini;

Φ l'ensemble de toutes les fonctions $\varphi(x)$ indéfiniment dérivables et nulles en dehors des intervalles finis;

C l'ensemble des nombres réels avec la convergence au sens habituel.

⁵⁾ Cf. ce fascicule, p. 112, renvoi ¹⁾.

⁶⁾ Cf. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne 3, Warszawa-Lwów 1933, p. 76.

En admettant alors que la composition $f\varphi=c$ est définie par la relation $f\varphi=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$, la fermeture $\check{F}$ de F contient des distributions de Laurent Schwartz ⁷⁾.

L'ensemble F peut être considéré dans ce cas comme espace linéaire par rapport à l'addition et à la multiplication par un nombre. Or, ces deux opérations étant régulières, il s'en suit que l'ensemble $\check{F}$ des distributions est encore un espace linéaire. Cependant, la multiplication de deux fonctions de F n'est pas une opération régulière, il n'existe donc pas de multiplication de deux distributions.

La notion de convergence faible est susceptible à bien d'autres interprétations intéressantes.

SÉANCE DU 12 DÉCEMBRE 1947

E. Marczewski. *Sur un théorème de S. Mazurkiewicz concernant les espaces de variables aléatoires* (voir le travail posthume de S. Mazurkiewicz, *Sur les espaces de variables aléatoires*, avec un commentaire de E. Marczewski, *Fundamenta Mathematicae* 35, à paraître).

⁷⁾ Cf. Laurent Schwartz, *Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et Applications mathématiques et physiques*, Annales de l'Université de Grenoble (Nouvelle série), Section des Sc. Math. et Phys. 21 (1946), § 1. Définition 2.

C H R O N I Q U E

PÉRIODIQUES MATHÉMATIQUES DE LA POLOGNE

Presque tous les périodiques mathématiques de la Pologne ont repris ou sont en train de reprendre leur activité d'avant-guerre.

„Fundamenta Mathematicae”, périodique consacré à la théorie des ensembles et à ses applications, a été fondé en 1920 par Z. Janiszewski, S. Mazurkiewicz et W. Sierpiński; il est rédigé actuellement par K. Kuratowski et W. Sierpiński avec le concours de K. Borsuk comme Secrétaire de la Rédaction. Vers la fin de 1945 le volume 33 a paru; le volume 34 l'a suivi en 1947 et le volume 35 est sous presse à l'Imprimerie de l'Université de Cracovie. Le siège de la Rédaction se trouve à Varsovie (Séminaire Mathématique de l'Université, 69 rue Hoża).

„Studia Mathematica”, périodique consacré à l'analyse fonctionnelle, a été fondé en 1929 par S. Banach et H. Steinhaus; il est rédigé à présent par H. Steinhaus (Wrocław), W. Orlicz (Poznań) et S. Mazur (Łódź) avec le concours de B. Knaster comme rédacteur technique et de M. Stark comme Secrétaire de la Rédaction. En 1940 le volume 9 a paru à Lwów; les premières feuilles du volume 10 sont en ce moment sous presse à l'Imprimerie de l'Université et de l'École Polytechnique de Wrocław. Le siège de la Rédaction se trouve à Wrocław (Séminaire Mathématique, bâtiment central de l'École Polytechnique, 27 quai Wyspiański).

„Annales de la Société Polonaise de Mathématique”, organe de la Société, publiant à côté des travaux scientifiques ses comptes rendus officiels, a été fondé en 1921 par S. Zaremba; il est rédigé par F. Leja avec le concours de S. Gołąb et T. Ważewski. Après la guerre, les volumes 18 et 19 ont paru; le volume 20 est sous presse à l'Imprimerie de l'Université de Cracovie et le volume 21 est en préparation. Le siège de la Rédaction se trouve à Cracovie (Institut Mathématique, 22 rue Św. Jana).

„Prace Matematyczno-Fizyczne” (publiés en langues polonaise et étrangères) est le plus ancien périodique mathématique polonais. Fondé par S. Dickstein en 1888, il était rédigé par lui jusqu'à 1939; sa publication est en train d'être reprise par la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie sous la rédaction