PROBLÈMES

P2, R1. La réponse est négative. Voir K. Kuratowski, *Sur un problème topologique de la théorie de la mesure* (à paraître au fascicule 3 de ce volume).

I, 1, p. 29.

P3, R2. La réponse est négative. Les solutions sont parvenues de B. Jessen (Copenhague), J. L. Doob (Urbana, Ill.) et D. Blackwell (Washington, D. C.). Au moins la première sera publiée au fascicule 3 de ce volume.

I, 1, p. 29 et 30.

P8, R1. S. Mazur (Łódź) et R. P. Boas jr (Providence, R. I.) font observer que le problème est trivial: toute fonction f satisfaisant à l'équation $f(x+y)=f(x)+f(y)$ est évidemment lisse, ce qui implique qu'il en est en particulier de même de la bien connue fonction non mesurable de Hamel.

I, 1, p. 32.

P9, R1. Z. Zahorski fait savoir que son problème a été traduit d'une façon erronée et en rectifie l'énoncé. Au lieu de „, ne prenant d'ailleurs les valeurs intermédiaires entre deux valeurs données qu'aux points $x \epsilon D_f$", il faut lire „de la manière suivante: si $g(a)<\eta<g(b)$, il existe entre a et b un $\xi \epsilon D_f$ tel que $g(\xi)=\eta$".

P9, R2. A. Zygmund (Chicago, Ill.) vient de signaler la réponse suivante:

Mr. Z. Zahorski asks what is the measure and the category of the set of the points at which a smooth and continuous function is differentiable. That such a set may be of measure zero is shown in A. Zygmund, *Smooth Functions*, Duke Mathematical Journal 12 (1945), pp. 47-76, esp. p. 58. The example there given is

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-1/2}\, 2^{-\nu} \sin 2^{\nu} x.$$

The set of the points of differentiability of this function is also of the first category since already the set of the points where the derivative of f is $+\infty$ is everywhere dense and so, being a G_δ, must be of the second category.

I, 1. p. 32. Chicago, April 8, 1948

P15, R1. Grâce aux remarques communiquées par M. Kac (Ithaca, N. Y.), S. Hartman a résolu lui-même une partie de son problème en montrant que $\limsup (\sin n)^n = 1$.

Le problème de l'évaluation des deux autres limites reste ouvert.

I, 1, p. 33 et 34.

S. BANACH †

P21. Formulé dans la publication posthume *Sur les suites d'ensembles excluant l'existence d'une mesure.*

Ce fascicule, p. 103.

P22. Formulé dans la publication posthume *Sur la représentation des fonctions indépendantes à l'aide des variables distinctes.*

Ce fascicule, p. 117.

E. MARCZEWSKI (WROCŁAW)

P23. Formulé ibidem.

Ce fascicule, p. 121.

P24. Formulé dans la communication *Indépendance d'ensembles et prolongement de mesures.*

Ce fascicule, p. 130.

P24, R1. La réponse est négative. Elle se réduit — comme Henry Helson (Cambridge, Mass.) vient de montrer pendant son séjour actuel à Wrocław — à une autre proposition d'existence, et H. Steinhaus (Wrocław) a établi cette proposition par un exemple. La solution sera publiée dans Studia Mathematica 10 (1948).

R. SIKORSKI (VARSOVIE)

P25. Formulé dans la communication *On a generalization of theorems of Banach and Cantor-Bernstein.*

Ce fascicule, p. 144.

S. BANACH †

P26. Quand est-il possible de métriser l'espace métrique, en particulier du type (B), de manière qu'il devienne compact et que les suites convergentes d'après la distance primitive restent convergentes d'après la nouvelle?

Est-ce que l'espace (c_0) [1], par exemple, se laisse métriser de la sorte?

Livre Écossais, Probl. 1, 17. VII. 1935

P27. Est-ce que, dans l'espace euclidien à 3 dimensions, toute surface S homéomorphe à celle de la sphère et admettant en chaque point

(a) un plan tangent,

(b) un plan tangent qui varie de manière continue

est *topologiquement équivalente* à la surface de la sphère, c'est-à-dire transformable en elle par une homéomorphie transformant l'espace entier en lui même?

Livre Écossais, Probl. 12, VII. 1935

P28. Étant donné un groupe $\mathfrak{G}$ (non abélien) métrique et complet, c'est-à-dire espace du type (G) [2], soit $U_1(x), U_2(x), \dots U_k(x)$ une suite de k opérations multiplicatives définies dans $\mathfrak{G}$ et dont les valeurs appartiennent à $\mathfrak{G}$.

Démontrer que si l'opération $U(x)=U_1(x)\cdot U_2(x)\cdot\ldots\cdot U_k(x)$ est mesurable (B) [3], elle est continue.

Le théorème est vrai pour $k=2$ [4].

Livre Écossais, Probl. 45, 1935

P29. Démontrer que l'intégrale de Denjoy n'est pas une fonctionnelle mesurable (B) [5] dans l'espace (S) [6].

Livre Écossais, Probl. 50, 1935

P30. Soit $\|x\|_p$ la *norme* de la fonction $x(t)$ dans l'espace (L^p) [7], c'est-à-dire

$$\|x\|_p=\left(\int_0^1 |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

[1]) Pour la définition, voir S. Banach, *Théorie des opérations linéaires* Monografie Matematyczne 1, Warszawa 1932, p. 11 et 181.

[2]) Ibidem, p. 21.

[3]) Ibidem, p. 16.

[4]) Ce résultat n'a pas été publié.

[5]) Pour la définition, voir S. Banach, op. cit, p. 16.

[6]) Ibidem, p. 9.

[7]) Ibidem, p. 12.

Considérons une opération $y=U(x)$ définie dans (L^β) où $\beta\geqslant 1$, dont les valeurs appartiennent aussi à (L^β), qui est continue et satisfait à la condition de Lipschitz.

En admettant qu'il existe pour un $\alpha>\beta$ une constante M_α telle que

$$x\,\epsilon\,(L^\alpha) \quad \text{entraîne} \quad U(x)\,\epsilon\,(L^\alpha) \quad \text{et} \quad \|U(x)\|_\alpha\leqslant M_\alpha\cdot\|x\|_\alpha,$$

démontrer qu'il existe pour tout γ compris entre β et α une constante M_γ telle que

$$x\,\epsilon\,(L^\gamma) \quad \text{entraîne} \quad U(x)\,\epsilon\,(L^\gamma) \quad \text{et} \quad \|U(x)\|_\gamma\leqslant M_\gamma\cdot\|x\|_\gamma.$$

Livre Écossais, Probl. 87, 1935

P30, R1. Pour les opérations $U(x)$ linéaires, le théorème en question a été démontré par M. Riesz [1]). Il est vrai aussi pour $\alpha=+\infty$ [2]).

Livre Écossais, loco citato.

P31. Existe-t-il une suite $\{\varphi_n(t)\}$ orthogonale, normée et complète dans l'intervalle $0\leqslant t\leqslant 1$, qui ait la propriété suivante: quelle que soit la fonction $f(t)$ continue et non identiquement nulle dans cet intervalle, le développement

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(t)\int_0^1 f(t)\varphi_n(t)\,dt$$

est infini presque partout?

Livre Écossais, Probl. 185, 21. III. 1940

P32. Est-ce que toute permutation du tableau $\{a_{ik}\}$ $(i,k=1,2,\dots)$ peut être formée d'un nombre fini de permutations dont chacune laisse ou bien tous les éléments dans leurs lignes ou bien tous les éléments dans leurs colonnes?

Livre Écossais, Probl 47, 1935

P32, R1. La réponse est positive. La solution a été trouvée récemment par M. Nosarzewska: 5 permutations de ce genre (et même 3 lorsque le tableau est fini) suffisent toujours. La publication de ces résultats est prévue pour le volume suivant.

[1]) M. Riesz, *Sur les maxima des formes linéaires*, Acta Mathematica 49 (1926), p. 465-497; voir p. 481, Théorème VI.

[2]) Ce résultat n'a pas été publié.

P32, R2. En considérant, au lieu du tableau en question, le réseau plan R des points de coordonnées entières, le même problème peut être formulé comme suit: est-ce que toute transformation biunivoque de R en lui-même est une superposition d'un nombre fini des transformations biunivoques dont chacune est de la forme

$$x'=x, \quad y'=f(x,y) \qquad \text{ou} \qquad x'=g(x,y), \quad y'=y\,?$$

Ainsi formulé, le problème peut être rapproché de celui posé pour le plan entier par S. Ulam; voir Fundamenta Mathematicae 24 (1935), p. 324.

S. BANACH † ET S. MAZUR

P33. Appelons un espace U du type (B) *universel au sens d'isométrie* et, respectivement, *universel au sens d'isomorphie* [1]) pour une classe donnée $\boldsymbol{K}$ d'espaces du type (B), lorsque tout espace $E\epsilon\boldsymbol{K}$ est respectivement isométrique, ou isomorphe, à une partie linéaire de l'espace U. Désignons par:

$\boldsymbol{K}_1$ la classe des espaces séparables dans lesquels tout ensemble borné est faiblement compact [2]),

$\boldsymbol{K}_2$ la classe des espaces qui admettent une base dénombrable au sens de Schauder [3]),

$\boldsymbol{K}_3$ la classe des espaces dont les espaces conjugués [4]) sont séparables.

Existe-t-il dans chacune de ces trois classes un espace universel pour elle au sens d'isométrie et d'isomorphie respectivement?

Livre Écossais, Probl. 49, 1935

[1]) Pour la définition, voir S. Banach, op. cit., p. 180.
[2]) Ibidem, p. 239 et 133.
[3]) Ibidem, p. 110.
[4]) Ibidem, p. 188.

S. BANACH † ET S. ULAM

P34. Existe-t-il dans tout espace métrique compact E une mesure (simplement additive) telle que les ensembles boreliens superposables aient les mêmes mesures?

Si l'espace métrique E admet une décomposition en sommandes disjoints superposables $E=E_1+E_2+\ldots+E_n$, convenons d'écrire $E_j={}^1/_nE$ $(j=1,2,\ldots,n)$. L'espace E étant compact, peut-il exister des ensembles boreliens superposables ${}^1/_nE$ et ${}^1/_mE$ pour $n\neq m$?

Livre Écossais, Probl. 2, 17. VII. 1935

P35. Existe-t-il sur le segment $\langle 0,1\rangle$ une mesure dénombrablement additive définie pour les ensembles projectifs [1]) et qui, pour les ensembles mesurables (B), coïncide avec la mesure de Lebesgue?

Une telle mesure, existe-t-elle du moins dans le plus petit corps d'ensembles contenant tous les ensembles PCA [2])?

Répondre aux mêmes problèmes sous l'hypothèse supplémentaire que les ensembles superposables aient les mesures égales.

Livre Écossais, Probl. 40, 26. VII. 1935

P35, R1. Une remarque (non publiée) signalée par E. Marczewski et qui fait l'usage des connus résultats de K. Gödel implique [3]) que la non-existence de la mesure en question est compatible avec le système d'axiomes de la théorie des ensembles.

[1]) Voir pour la définition: C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne 3, Warszawa-Lwów 1933, p. 234.
[2]) Voir pour la définition: ibidem, p. 235.
[3]) Cf. ce fascicule, K. Kuratowski, p. 176 et A. Mostowski, ibidem.