

SOUVENIR DE STEFAN BANACH

PAR

H. STEINHAUS (WROCLAW)

Ceux qui se sont réunis ici, amis et parents, collègues et élèves, camarades et familiers de Banach vivant, n'attendent pas la confirmation de la nouvelle de deuil d'il y a un an. Ils désirent qu'on la réfute et — soit ce pour un moment — qu'on la laisse oublier. Reculons donc d'une trentaine d'années et transportons nous à Cracovie.

C'était l'année 1916 — la guerre, l'incertitude et la misère — mais on pouvait quelque soir d'été s'asseoir sur un banc aux Plantes et causer mathématique. C'est par un tel soir qu'il m'est arrivé d'être écouteur d'une causerie de Stefan Banach, alors étudiant inachevé de l'École Polytechnique de Lwów, relancé par la guerre dans sa ville natale, Cracovie. Il était des trois dont l'un seulement, Otton Nikodym, est resté vivant, car Witold Wilkosz n'a pas survécu aux cauchemars de la seconde guerre mondiale. Ces trois et, avec eux, Alfred Rosenblatt, qui depuis des longues années professe les mathématiques à Lima (Pérou)¹⁾, Leon Chwistek, mort en 1944 à Moscou, Jan Króo et Włodzimierz Stożek, tués par les Allemands, et — parmi les présents ici — Władysław Ślebodziński et moi, nous nous rencontrions chaque semaine dans la modeste garçonnière, 9 rue Karmelicka. Il fallait lutter avec la patronne du logement qui, de crainte devant le propriétaire de l'immeuble, ne voulait pas nous accorder de fixer au mur un mètre carré de toile cirée remplaçant le tableau. Nos réunions étaient d'ailleurs illégales, car on défendait toute assemblée pendant la guerre. C'est alors que Stefan Banach, ayant appris qu'il existe des séries de Fourier essentiellement divergentes, avait résolu par la négative le problème de la convergence en moyenne. C'est ainsi qu'a pris naissance notre communication commune [1], présentée par S. Zaremba à l'Académie de Cracovie — avec un retard de deux ans. Je connaissais bien les difficultés du problème;

¹⁾ décédé en 1947, voir ce fascicule, *Notices*.

c'est pourquoi j'ai été fortement impressionné du fait de sa résolution par un étudiant n'ayant d'autres renseignements que ceux trouvés au hasard dans les manuels ou entendus dire par deux autres débutants en mathématiques.

Stefan Banach rêvait alors d'obtenir la place d'assistant à l'École Polytechnique de Lwów; à Cracovie, il gagnait sa vie en donnant des leçons privées. Cependant, ce n'est qu'après la guerre, en 1920, que son désir a pu être réalisé par le feu professeur Antoni Lomnicki, auquel j'avais raconté le cas. L'Université de Lwów a consenti de doctoriser Banach avec dispense d'études: personne ne doutait que c'était à juste titre le candidat exceptionnel pour lequel la loi prévoyait ce privilège. Le serment du doctorat „*ut veritas magis resplendeat*” a été tenu par lui en toute rigueur. Sa thèse [7] parut en 1922 dans „*Fundamenta Mathematicae*”.

Quand Banach s'était installé à Lwów, on avait à déplorer la mort de Zygmunt Janiszewski, éteint dans les débuts de sa carrière scientifique²⁾. On peut dire que Banach l'a relevé à Lwów. Car la tendance aux généralisations leur était commune, ils aimaient tous les deux les théories vastes et limpides; ils étaient les deux des mathématiciens pur sang. Au fond, Banach ne se passionnait ni pour les investigations axiomatiques, bien qu'il les connût à fond, ni pour les applications pratiques, bien qu'il les comprît parfaitement: un an à peine après son doctorat, il faisait le cours de Mécanique à l'École Polytechnique. Jamais il n'aurait accepté d'appeler la mathématique un chapitre de la logique: pour lui, les considérations logiques étaient engendrées par un esprit différent. Il n'en formulait pas de critères rigoureux, mais disait que la mathématique se documente par sa beauté spécifique et ne se laisse enfermer dans aucun système déductif car elle fait sauter, tôt ou tard, tout engrenage de dogmes et crée de nouveaux axiomes; c'est alors qu'elle quitte la logique, car elle entend une voix qui l'appelle et qui, à la logique, ne dit rien. Pour Banach, c'était le problème de la valeur des théories mathématiques qui décidait, et non seulement celui de leur vérité; encore s'agissait-il de leur valeur intrinsèque et non pas de leur valeur utilitaire. J'ignore si Banach avait accepté la thèse d'après la-

²⁾ Maître de conférences à l'Université de Lwów, il a été nommé en 1919 professeur à l'Université de Varsovie.

quelle mathématique est une science naturelle, mais sûrement il n'était pas loin de l'accepter, bien qu'il n'eût pas été géomètre au sens strict.

Pour dire ce qu'il faisait à Lwów depuis 1920 jusqu'à 1945, il me faudrait résumer l'histoire d'un quart de siècle de mathématique dans cette ville. Ceci dépasserait mes moyens et les cadres de cette conférence. Nommé professeur en 1922, Banach n'a jamais été un employé à la chaire. On peut apprécier le mieux l'influence et l'importance de sa personnalité en comptant ses élèves. Stanisław Mazur et Władysław Orlicz, actuellement professeurs et continuateurs les plus proches de ses idées, Stanisław Ulam, à présent à Los Alamos (New Mexico, U. S. A.), Juliusz Schauder, lauréat du prix international, assassiné par les Allemands en 1942 à Lwów, Józef Schreier et Max Eidelheit, atteints du même sort, étaient ses disciples. Kazimierz Kuratowski, Alfred Tarski, actuellement professeur à Berkeley (California, U. S. A.), Stanisław Saks, abattu par les Allemands en 1943 à Varsovie, Stanisław Ruziewicz, martyr du Juillet 1941 à Lwów, Stefan Kaczmarz, tombé en septembre 1939 au champ de bataille, enfin moi-même et tant d'autres, nous avons tous collaboré avec lui. Ce n'est pas sa faute que si peu d'arbres sont restés de l'épaisse forêt plantée par lui.

Banach n'était pas mathématicien de la finesse; il était mathématicien de la force. A cet égard, il me rappelait Hilbert. La découverte de la notion universelle d'intégrale [9] est un travail typique pour Banach. Ici, la technique qu'on acquiert par la routine de l'atelier scientifique n'était pour rien. Ici, il fallait faire un nouveau pas en avant, tel que fût la conception d'idéaux en algèbre, par exemple.

Banach se rendait bien compte, lui même, des différences entre les diverses capacités mathématiques et il en avait sa propre classification. Il m'a dit une fois que mathématicien est celui qui sait trouver des analogies entre les théorèmes, plus fort est celui qui voit des analogies entre les démonstrations, mieux encore qui aperçoit des analogies entre les théories, mais qu'on peut même se figurer un qui entrevoit des analogies entre les analogies.

Parmi les presque 60 travaux de Banach, il n'y a pas de bagatelles: Il n'écrivait pas volontiers et éprouvait des difficultés

à mettre au point la rédaction de ses manuscrits pour l'impression; sans le concours de ses assistants ou collègues, plus d'une de ses publications n'aurait jamais obtenu sa forme définitive.

Il a été aidé dans son travail par la vigueur de son organisme. Physiquement fort, il était brave et courageux. Il lui est arrivé d'être assailli la nuit, dans la rue, par deux voyous; seul, sans armes, même sans canne, il en est venu à bout. Il pouvait causer mathématique sans moindre fatigue pendant des heures entières. Dans un article consacré à sa mémoire³⁾, M. Ulam fait mention d'une séance qu'ils ont tenue en trois avec M. Mazur et qui dura 17 heures; il ajoute: „It was hard to outlast or outdrink Banach during these sessions”.

Ces „séances” avaient le plus souvent lieu au café „Roma” ou au „Café Ecosais”. Entouré de collègues et disciples, Banach n'y rappelait en rien ce type du professeur-pédant qui craint de perdre le nimbe de sa dignité. Il a créé un nouveau mode de travail scientifique: conversations et discussions à la table d'un café, menées sans austérité professorale de la part du maître, sans crainte de blâme pour l'élève, et argumentées par les prémisses écrites au crayon sur le marbre de la table ou sur les serviettes en papier. Banach avait compris le premier qu'en présence d'un jeune homme de faible volonté, incapable de demeurer solitaire chez lui pour se contraindre soi-même à surmonter les résistances internes et les freins psychiques qui paralysent l'invention, il ne faut pas le laisser à la dérive, mais qu'il faut le faire entraîner par une pléiade d'individualités plus fortes. Banach ne se laissait déranger ni par les conversations aux tables voisines, ni par le va-et-vient du monde, ni même par le bruit de la musique. Beaucoup de gens respectables doutaient qu'on puisse travailler sérieusement dans un café; cependant, cette expérience de plus de dix ans a convaincu tout le monde de l'efficacité parfaite de la méthode de Banach, pratiquée dans cette ambiance spécifique. Banach a créé en quelque sorte une Bourse d'idées et de problèmes, facilitant aux jeunes, mais aussi aux plus âgés, le choix des sujets qui convenaient le mieux à leur curiosité ou à leur talent. La liberté de conversation qu'on a au

³⁾ S. Ulam, *Stefan Banach 1892-1945*, Bulletin of the American Mathematical Society 52 (1946), p. 600-603.

café permettait de sauter d'un problème à l'autre, de rectifier les erreurs et d'effacer sans gêne les propos conduisant à des impasses. Quant à la manière de les effacer, les garçons de café étaient d'avis fort différent. Banach ne se séparait jamais de son crayon chimique qui les mettait en désespoir, car le lavage des tables de marbre était bien embarrassant; mais il était encore plus embarrassant de faire comprendre aux autres clients ce que signifiaient ces hiéroglyphes violets.

Enfin, en été de 1935, Banach a réglé le différend à la satisfaction des deux partis, en fondant l'ainsi dit „Livre Ecossais”. C'était simplement un gros cahier à reliure rigide déposé en permanence au „Café Ecossais” entre les mains du garçon de paiement qui le plaçait sur la table des mathématiciens aussitôt qu'il venaient. On inscrivait dedans les problèmes et parfois les solutions; pour certaines solutions, on promettait des prix qui variaient d'un demi mocca jusqu'à ... une oie vivante. A côté de l'écriture de Banach, celle de Śaks, Ruziewicz, Schauder, Aurbach, Eidelheit, Sternbach et d'autres victimes des crimes allemands s'y sont éternisées; parmi les mathématiciens des autres pays, on y rencontre les inscriptions de presque tous les mathématiciens qui se sont trouvés à Lwów à un moment ou un autre après 1935. On y voit les problèmes inscrits par Marcinkiewicz et par Kaczmarz; parmi ceux proposés par les mathématiciens vivants, le plus grand nombre semble appartenir à Ulam et à Mazur. On savait non seulement en Pologne, mais aussi partout où l'on s'intéressait des mathématiques, qu'il y avait une ville où se trouvait un café dont le garçon de paiement servait aux clients sur demande un cahier des problèmes mathématiques les plus récents. En 1941, le „Livre Ecossais” était clos. Gardé et sauvé des périls de la guerre par son fondateur, il se trouve finalement à Wrocław grâce aux soins de Mme Lucie Banach. Nous en devons à elle une gratitude profonde, car le „Livre Ecossais” est un monument, unique dans son originalité, de la personnalité extraordinaire qui l'avait créé.

Banach a eu la vie bien dure. A l'âge de 15 ans, il a dû déjà gagner sa vie en donnant des leçons. Plus tard, les circonstances l'ont contraint à écrire des manuels scolaires et universitaires qui absorbaient son temps à un tel point qu'il n'en lui restait que peu pour ses recherches personnelles. Mais il a su triompher même de ce lourd fardeau.

Il avait d'excellentes idées didactiques. Ce sont surtout les exemples et les problèmes scolaires imaginés par lui qui font ressortir le mieux le nouveau mode inventé par leur auteur de traiter ces matières, devenues apparemment par trop banales. Comme sur tant d'autres questions, il a eu son opinion personnelle aussi sur l'enseignement mathématique secondaire. Selon lui, la mathématique est un instrument trop tranchant pour les adolescents et sa valeur instructive dans l'enseignement secondaire est inférieure à celle des lettres. Plus tard, la guerre m'a fourni l'occasion de reconnaître la justesse de cet avis. Banach faisait parfois des observations inattendues et fort remarquables. Il m'a dit, par exemple, que l'opinion courante d'après laquelle les nombres entiers seraient des êtres naturels correspondant aux ensembles finis, auxquels on a affaire dans la vie réelle, est en défaut lorsqu'il s'agit des nombres très élevés. Car quel est, en effet, le sens de la proposition que New York compte 11.785.438 habitants? Quel est le fait réel auquel correspond cette affirmation? Pour en expliquer le sens, il faudrait composer un commentaire gros comme un volume et qui contiendrait les réponses à tous les doutes de la commission de recensement; mais alors on verrait qu'il est impossible en réalité d'effectuer jamais un tel recensement. Ainsi, la proposition considérée ne diffère essentiellement des théorèmes où il est question des nombres irrationnels ou même transcendants. En faveur du talent didactique de Banach témoigne aussi ce fait qu'on projette en Amérique de traduire sa „Mécanique” [50] en anglais car on n'y possède pas de manuel pour les écoles supérieures qui unisse tant d'avantages de clarté avec tant de rigueur scientifique.

En lui se confirmait la parole que le génie est l'aptitude au travail particulièrement intense. Banach savait travailler. Pour cela, il n'avait besoin ni de silence de son cabinet, ni de splendides bibliothèques, ni d'heures choisies, ni de moments opportuns. Il savait travailler au café et à la promenade, le matin et le soir; il savait écrire sur des feuilles de papier arrachées d'un cahier quelconque et qu'il collait ensuite l'une à l'autre à la gomme arabique; il savait toujours résumer d'une façon brève et claire ce qu'il avait fait et ce qu'il était en train de chercher.

Banach n'attachait pas tant d'importance à des honneurs qu'à son propre rôle actif au sein de la Section de Lwów de la

Société Polonaise de Mathématique. Il n'y manquait jamais aux séances. Il écoutait toujours plus attentivement que les autres et tombait toujours juste au cours des discussions.

Les affaires non-mathématiques ne jouaient pour lui que le rôle des moyens, jamais celui des buts. Il considérait l'art et la littérature comme des distractions, et la nature comme un repos. Il serait probablement embarrassé si on lui avait posé la question pourquoi s'occupait-il de la mathématique; cependant il est évident qu'il considérait cette occupation comme la seule vraiment importante et conforme à sa nature. Quand le feu Kazimierz Bartel avait fait sa connaissance, il a dit de lui: „Cet homme est doué d'une clarté brutale de la pensée”. En effet, Banach était un réaliste et il ne mêlait jamais ses désirs aux faits. Il disait souvent que l'espérance est la mère des sots. Quand nous nous trouvâmes en 1939 dans une situation tout à fait trouble, il a dit: „Ça durera plus de deux ans”. Tout le monde s'attendait alors à un revers de fortune dans un ou deux mois au plus.

Ses cours étaient très clairs. Jamais il ne couvrait le tableau des longues formules. Aussi, dans ses écrits évitait-il l'échafaudage des formules et des signes. Modéré dans le choix du sujet, il se détournait toujours de la spécialisation exagérée, en même temps que de la généralisation stérile. Le secret du succès de sa théorie des opérations linéaires réside précisément dans le choix du juste milieu: les espaces auxquels on a donné son nom ont été choisis de façon qu'ils embrassent tous les domaines connus de l'Analyse, tout en restant suffisamment spéciaux pour fournir de nouveaux théorèmes et non pas seulement de banales analogies à l'Algèbre linéaire.

S'il vivait, il serait avec nous à Wrocław, là où une nouvelle école est à créer. C'est une tâche qu'il considérait toujours comme son devoir et c'était probablement la raison pour laquelle il n'est allé ni à Varsovie, ni à Cracovie, où les centres de la pensée mathématique s'étaient déjà bien cristallisés. Il ne voulut pas quitter l'endroit où il trouvait un ensemble de conditions uniques dans son genre. C'est pourquoi il serait allé là où ces conditions se laisseraient reproduire. C'est pourquoi on a à raison nommé ici une rue de son nom. Et c'est pourquoi, avant tout ici — à Wrocław — nous, ses élèves, raconterons à nos élèves qui était et qu'a fait Stefan Banach.

SUR L'OEUVRE SCIENTIFIQUE DE STEFAN BANACH

I. THÉORIE DES OPÉRATIONS ET THÉORIE DES SÉRIES ORTHOGONALES

PAR

W. ORLICZ (POZNAŃ)

Deux domaines de l'Analyse mathématique ont surtout intéressé le feu professeur Banach durant toute la période de son activité scientifique: la théorie des fonctions réelles et la théorie des opérations. Bien qu'il fût parvenu dans la théorie des fonctions réelles, particulièrement dans celle de la mesure et de l'intégrale, à des résultats importants qui lui ont valu un nom durable dans l'histoire des mathématiques des dernières dizaines d'années, ce sont avant tout ses recherches fondamentales dans la théorie des opérations grâce auxquelles son nom est devenu universellement connu dans le monde scientifique et qui ont fait parler de l'École mathématique de Lwów comme d'un centre représentatif, à côté de l'École de Varsovie, de la pensée mathématique polonaise de nos jours.

Ici, je me propose d'exposer brièvement les principaux résultats de Banach dans la théorie des opérations; je rappellerai aussi ses recherches dans la théorie des séries orthogonales car elles sont basées en grande partie sur celle des opérations.

On connaît le fort développement que la théorie des équations intégrales et celle des équations à infinité d'inconnues a pris au cours de la première quinzaine d'années de notre siècle. Ces belles théories mathématiques présentent une certaine synthèse — bien qu'incomplète encore — des méthodes algébriques et de celles de la géométrie analytique, convenablement généralisées. Banach, alors au début de sa carrière scientifique, n'a pas manqué d'apercevoir l'absence d'un formalisme mathématique capable de saisir d'un même point de vue les diverses classes de fonctions, de suites infinies etc. et les différentes notions de convergence qu'on définissait jusqu'alors *ad hoc*, selon le cas, au cours des recherches sur les équations intégrales et les systèmes d'équations à infinité d'inconnues. Il s'était occupé de ces problèmes d'abord dans sa thèse de doctorat [7].