COMPTES RENDUS

SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE
SECTION DE WROCŁAW

Les communications faites pendant l'année scolaire 1945-1946 depuis le 20 octobre 1945 (séance d'inauguration de la Section) jusqu'au 28 juin 1946 ne sont mentionnées ici que tout au plus avec des indications bibliographiques supplémentaires, car leurs résumés et quelques unes des données bibliographiques alors disponibles ont paru dans les Annales de la Société Polonaise de Mathématique 19 (1947), p. 227-237.

SÉANCE DU 20 OCTOBRE 1945

W. Ślebodziński. *Sur la géometrie textile.*

E. Marczewski. *Remarques sur l'équivalence des classes d'ensembles.*

SÉANCE DU 7 DÉCEMBRE 1945

H. Steinhaus. *Sur les jeux alternatifs.*

SÉANCE DU 11 JANVIER 1946

E. Marczewski. *Sur l'isomorphie des relations et l'homéomorphie des espaces.*

SÉANCE DU 18 JANVIER 1946

H. Steinhaus. *Sur le mouvement d'un essaim de points abandonné à l'intérieur d'un cube* (voir H. Steinhaus, *Sur les fonctions indépendantes (VII)*, Studia Mathematica 10 (1948), p. 1-20).

SÉANCE DU 15 FÉVRIER 1946

B. Knaster. *Sur le problème du partage pragmatique de H. Steinhaus.*

H. Steinhaus. *Remarques sur le partage pragmatique.*

SÉANCE DU 22 FÉVRIER 1946

H. Steinhaus. *Evaluation du volume des troncs de bois* (voir H. Steinhaus, *Sur la cubature des troncs de bois*, ce volume, p. 23-28).

W. Ślebodziński. *Quelques remarques sur la représentation des vecteurs covariants et contravariants.*

SÉANCE DU 1 MARS 1946

S. Hartman et E. Marczewski. *Sur la mesure relative de H. Steinhaus.*

SÉANCE DU 8 MARS 1946

H. Steinhaus. *Sur quelques indices géographiques.*

SÉANCE DU 12 MARS 1946

S. Gołąb (Cracovie). *La réduction des objets géométriques de la première classe aux objets du type Δ.*

SÉANCE DU 5 AVRIL 1946

B. Knaster. *Sur les transformations continues des sphères en hyperplans de dimensions inférieure.*

SÉANCE DU 26 AVRIL 1946

E. Marczewski. *Two-valued measures and prime ideals in fields of sets* (Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, à paraître).

SÉANCE DU 17 MAI 1946

H. Steinhaus et M. Warmus. *Quelques théorèmes sur les jeux.*

M. Warmus. *Un théorème sur la poursuite.*

SÉANCE DU 24 MAI 1946

H. Steinhaus. *Sur le problème du tarif électrique* (paru en polonais comme opuscule N° 1 des Travaux de la Société des Sciences et des Lettres de Wrocław, Série B (1947), 50 pages).

SÉANCE DU 31 MAI 1946

W. Orlicz (Poznań). *Les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées.*

SÉANCE DU 7 JUIN 1946

C. Kuratowski (Varsovie). *Sur l'application de l'homotopie au problème des points invariants.*

SÉANCE DU 14 JUIN 1946

E. Marczewski. *Isomorphie des mesures et arithmétisation des variables aléatoires.*

SÉANCE DU 28 JUIN 1946

S. Hartman. *Remarques sur les ensembles et les fonctions indépendantes* (voir S. Hartman, *Sur deux notions de fonctions indépendantes*, ce volume, p. 19-22).

SÉANCE DU 5 JUILLET 1946

O. Nikodym (Cracovie). *Recherches sur les corps de Boole.*

G. Choquet (Paris). *L'aire des surfaces.*

SÉANCE DU 12 JUILLET 1946

H. Steinhaus. *Introviseur, appareil pour la localisation des corps étrangers dans l'organisme moyennant les rayons X* (cf. la communication préliminaire de l'auteur, Comptes rendus Acad. des Sc., Paris, Mai 1938).

Explication du principe et démonstration du fonctionnement d'un modèle récent construit à Wrocław en 1946 sous la direction de l'auteur.

SÉANCE DU 15 NOVEMBRE 1946

S. Drobot. *Sur les équations de la théorie de l'élasticité.*

Ce travail concerne une généralisation des équations de l'élasticité pour le cas où sur un corps déformable agissent, en dehors des forces, des moments extérieurs s'exerçant sur les éléments de volume et sur les éléments de surface. Pour définir l'état des efforts en un point du corps, il faut se servir, au lieu d'un tenseur symétrique, de deux tenseurs asymétriques: le tenseur „des forces" et celui „des moments". Leur composantes satisfont à 6 équations aux dérivées partielles qui peuvent être divisées en deux groupes. Les équations du premier groupe ne diffèrent des équations habituelles que par asymétrie, celles du second généralisent les conditions de Cauchy de la symétrie du tenseur des efforts. On définit la déformation à l'aide d'un tenseur asymétrique dont les composantes sont simplement les dérivées partielles des déplacements. L'hypothèse de Hooke s'exprime au moyen d'une relation linéaire entre les éléments des tenseurs cités. Pour un corps isotrope et homogène, on peut réduire le nombre des constantes d'élasticité respectivement de 162 à 3 et de 324 à 4. On démontre l'existence du potentiel élastique qui est une forme quadratique définie positive des élements des tenseurs. On démontre aussi l'unicité de la solution du problème de Dirichlet pour les composantes des déplacements. Les éléments des tenseurs de la déformation satisfont à quelques conditions de compatibilité, différentes de celles de Saint-Venant. On montre enfin que, pour que l'équilibre du corps déformable soit possible, il est nécessaire qu'il existe quelques relations entre les composantes des efforts extérieurs et des constantes d'élasticité.

SÉANCE DU 22 NOVEMBRE 1946

E. Marczewski. *Sur l'isomorphie des mesures séparables.*

Toute fonction $\mu(E)$ finie, non négative et additive, définie pour chaque E appartenant à un corps de Boole K s'appelle *mesure* dans K.

μ étant une mesure dans K et N l'idéal formé de tous les $E \epsilon K$ tels que $\mu(E)=0$, la mesure μ induit dans le corps-facteur K/N une nouvelle mesure qui sera désignée par μ_0: à savoir, on pose $\mu_0(Z)=\mu(E)$ pour $E \epsilon Z \epsilon K/N$.

Le corps K/N peut être traité comme un espace métrique [1]), à savoir, en posant pour $Z_1, Z_2 \epsilon K/N$:

$$\varrho(Z_1 Z_2)=\mu_0[(Z_1-Z_2)+(Z_2-Z_1)].$$

Cet espace sera désigné par $\mathfrak{M}(\mu)$. On dit que la mesure μ est *complète, séparable, convexe* [2]) etc. lorsque l'espace $\mathfrak{M}(\mu)$ l'est respectivement. On voit aisément que, *pour qu'une mesure soit convexe, il faut et il suffit qu'elle soit non-atomique*, c'est-à-dire qu'elle satisfasse à la condition suivante: pour chaque E tel que $\mu(E)>0$, il existe un $E' \subset E$ tel que $\mu(E)>\mu(E')>0$.

On dit que les mesures μ et μ' dans les corps de Boole K et K' sont *isomorphes* lorsque les corps K et K' le sont et qu'on a $\mu(E)=\mu'(E')$ pour chaque couple $E \epsilon K$, $E' \epsilon K'$ d'éléments correspondants.

Les mesures μ et μ' sont dites *presque-isomorphes* lorsque les mesures μ_0 et μ'_0 sont isomorphes.

Théorème 1. Pour qu'une mesure dans un corps de Boole soit presque-isomorphe à la mesure de Lebesgue (considérée dans un intervalle), il faut et il suffit qu'elle soit séparable, complète et convexe.

---

[1]) Cf. p. ex. O. Nikodym, *Sur une propriété de la mesure généralisée des ensembles*, Prace Matematyczno-Fizyczne 36 (1928-1929), p. 65-71.

[2]) On dit d'après K. Menger qu'un espace métrique M est *convexe* lorsqu'il existe, pour tout couple $a \epsilon M$, $b \epsilon M$, un $c \epsilon M$ tel que

$$\varrho(a,c)+\varrho(c,b)=\varrho(a,b).$$

Théorème 2. *Pour qu'une mesure dans un corps de Boole soit presque-isomorphe à la mesure de Lebesgue considérée dans un corps d'ensembles mesurables (L) (contenus dans un intervalle), il faut et il suffit qu'elle soit séparable.*

Ces théorèmes sont des généralisations des résultats antérieurs concernant le cas des mesures *dénombrablement additives* d'ensembles [3]).

SÉANCES DU 29 NOVEMBRE ET DU 6 DÉCEMBRE 1946

R. S. Ingarden. *Statistical Theory of the Vernier visual acuity.*

There are several hypotheses endeavouring to explain the Vernier visual acuity which is very high (*ca.* 3″) in comparison with the point resolution (*ca.* 45″). The best known theory of Hering[4]) leads to too small values of Vernier acuity; the newer theory of Weymouth[5]) gives too large values. Recently Talbot and Marshall[6]) put forward an idea that Vernier acuity depends on a special system of nervous connections between retinal cones and rods and cortical ganglion cells. These connections are not of one-one type (the ratio of the number of stimulated cones in the fovea to that of stimulated cortical visual cells is 1 : 600). Reciprocal overlapping of nervous connections creates a superposition of the cortical excitation the peak of which is more precisely localised than the peak of the cone excitation in the retina. The subject of the present contribution is an investigation of this conception from the mathematical and physical point of view. It leads to the conclusion that the theory of Talbot and Marshall cannot be maintained in its primary form. It is, however, possible

[3]) Cf. ma communication *On the space of measurable sets*, Annales de la Société Polonaise de Math. 17 (1938), p. 121 (la terminologie y est différente de celle employée ici); C. Carathéodory, *Die Homomorphieen von Somen und die Multiplikation von Inhaltsfunktionen*, Annali R. Sc. Norm. Sup. Pisa (2), 8 (1939), p. 105-130, en particulier „Hauptsatz", p. 125, et P. R. Halmos and J. von Neumann, *Operator methods in classical Mechanics II*, Annals of Mathematics 43 (1942), p. 332-350, en particulier Th. 1, p. 335.

[4]) E. Hering, Leipziger Sitzungsber. 51 (1900), p. 16.

[5]) F. W. Weymouth and coll., Amer. J. Physiol. 63 (1923), p. 410; Amer. J. Ophthalm. 11 (1928), p. 947.

[6]) S. A. Talbot and W. H. Marshall, Amer. J. Ophthalm. 24 (1941), p. 1255; cit. by G. L. Walls, J. Opt. Soc. Amer. 33 (1943), p. 487.

to obtain the required result on the assumption that the system of connections is built in the way of a „Pascal pyramid" (a space generalization of the known Pascal triangle on the plane). The existence of a threshold of excitation indicates that the distribution of excitations will be governed by statistical laws. It follows from the theory that for the observed Vernier acuity there must exist *ca.* 40 layers of interconnected neurones. As known from anatomy, there exist 3 neurone layers in the retina, 3-6 in the lateral geniculate, and a very great number of layers in the cortex. The theory gives also the ratio of the number of stimulated cells in the retina to that in the cortex to be *ca.* 1 : 650. This is in good agreement with the experimental result mentioned above.

SÉANCE DU 10 JANVIER 1947

Lecture et discussion des problèmes de S. Ulam communiqués par lettre à H. Steinhaus (à paraître dans Colloquium Mathematicum).

SÉANCE DU 24 JANVIER 1497

H. Steinhaus. *Sur un théorème de M. V. Jarník* (voir ce volume, p. 1-5).

B. Knaster. *Rapport du voyage en Tchécoslovaquie.*

Invité par le Ministère de l'Instruction Publique, l'Académie et deux Universités Tchécoslovaques, l'auteur a séjourné à Prague et à Brno depuis le 28 août jusqu'au 5 octobre 1946 afin de renouer la collaboration scientifique et l'échange éditorial entre les mathématiciens de deux Républiques, rompu par la guerre. Dans une conférence publique „Sur les nouvelles Ecoles Supérieures en Pologne" faite à l'Institut Mathématique de Prague sur l'invitation de l'Union des Mathématiciens et Physiciens Tchécoslovaques (Jednota Československých Matematiků a Fysiků) l'auteur a exposé l'état actuel et la structure des universités et des écoles polytechniques polonaises, en particulier de celles de Wrocław, où l'Université et l'Institut Polytechnique constituent une seule école dans laquelle leur symbiose a donné déjà et continue de donner des résultats fort encourageants. L'auteur a été renseigné: 1⁰ sur la reforme de l'enseignement mathématique dans les écoles primaires et secondaires en Tchécoslovaquie due à l'initiative de E. Čech, qui a composé lui-même une série de nouveaux manuels pour les instituteurs et les élèves, 2° sur le mode d'échange des boursiers avec l'étranger, pratiqué après la guerre par les mathématiciens tchécoslovaques (l'auteur fait mention de l'ancien boursier tchécoslovaque à Varsovie, V. Knichal. actuellement professeur de mathématique à l'Université de Brno), 3° sur l'organisation technique des imprimeries scientifiques, en particulier de celle „Prometheus" à Prague (propriété de la Jednota) dont la production y est la plus importante et qui peut servir de modèle pour la reconstruction en Pologne de ce genre d'industrie, détruite par les Allemands. Outre les conférences de topologie, l'auteur a fait une communication „Sur les applications des notions topologiques à la biologie" à la soirée de discussion organisée par la Faculté de Mathématique et des Sciences Naturelles de l'Université à Brno. L'auteur y a exposé les idées de ses collègues de Wrocław: botanicien S. Kulczyński [7]), pathologiste H. Kowarzyk, ainsi que celles de H. Steinhaus et de lui-même. Plusieurs mathématiciens et biologistes ont pris part à la discussion.

L'auteur a reçu pour les bibliothèques scientifiques polonaises, dévastées par les Allemands, un don de plus de 150 volumes de livres et périodiques, ainsi que plus de 300 tirages à part les plus récents.

SÉANCE DU 31 JANVIER 1947

E. Marczewski et M. Nosarzewska. *Sur la convergence uniforme et la mesurabilité relative* (voir ce volume, p. 15-18).

SÉANCE DU 21 FÉVRIER 1947

E. Marczewski. *Remarque sur la mesurabilité absolue.*

Soit μ une mesure finie dénombrablement additive, dans un corps K de sous-ensembles d'un ensemble X. Un ensemble $E\subset X$ s'appelle *mesurable* par rapport à μ, lorsqu'il existe deux ensembles $M_1, M_2 \epsilon K$ tels que

$$\mu(M_1)=\mu(M_2), \qquad M_1\subset E\subset M_2.$$

Un sous-ensemble E d'un espace métrique X s'appelle *absolument mesurable* [8]) s'il est mesurable par rapport à chaque mesure finie dénombrablement additive dans le corps des sous-ensembles boreliens de X. Si, pour chacune des telles mesures μ, il existe un ensemble $N\supset E$ où $\mu(N)=0$, on dit que E est *absolument de mesure nulle*.

A l'aide du théorème sur l'équivalence topologique des mesures dans l'espace euclidien [9]), l'auteur démontre que

I [II]. *Pour qu'un ensemble E dans l'espace euclidien à n dimensions soit absolument mesurable* [*absolument de mesure nulle*], *il faut el il suffit que chaque image homéomorphe de E, situé dans cet espace, soit mesurable* (L) [*de mesure lebesguienne nulle*] [10]).

M. Nosarzewska. *Sur les suites convergentes de fonctions convexes.*

I. Si une suite $\{f_n(x)\}$ de fonctions convexes converge dans l'intervalle fermé $\langle a, b\rangle$ vers une fonction $f(x)$ qui est continue aux points a et b, cette suite y converge uniformément.

On en déduit facilement (en tenant compte des propriétés connues des fonctions convexes) ceci:

II. Si une suite $\{f_n(x)\}$ de fonctions convexes converge dans l'intervalle ouvert (a, b) vers une fonction $f(x)$, cette suite converge uniformément dans tout intervalle fermé contenu dans (a, b).

SÉANCE DU 14 MARS 1947

H. Steinhaus. *Sur un problème élémentaire de M. Ulam.*

Soit E l'ensemble des points du plan cartésien aux coordonnées entières (on, plus généralement, un ensemble dénombrable plan qui contient des points au delà de tout cercle et de toute droite). Il existe alors une transformation biunivoque de E en lui-même qui altère toutes les distances entre les points de E.

7) cf. *Compte rendu du IV Congrès Polonais de Mathématique à Wrocław* (12-14 décembre 1946), ce volume, fascicule 2 (à paraître).

8) Cf. le mémoire de l'auteur *O zbiorach i funkcjach bezwzględnie mierzalnych (Sur les ensembles et les fonctions absolument mesurables)*, Comptes rendus de la Soc. des Sciences et des Lettres de Varsovie 30 (1937), p. 39-68 (en polonais).

9) J. C. Oxtoby and S. M. Ulam, *Measure preserving homeomorphisms and metrical transitivity*, Annals of Mathematics 42 (1941), p. 874-920, en particulier p. 886.

10) Pour le cas de $n=1$, ce théorème est démontré dans le mémoire précité de l'auteur, p. 20, th. 4.2 (iii).

Z. Moroń. *Sur les décompositions des rectangles en carrés inégaux*.

L'auteur appelle *irréductible* toute décomposition du rectangle en carrés inégaux dont les côtés sont plus courts que le plus petit des deux côtés du rectangle. L'auteur présente les décompositions irréductibles du rectangle en 9, 10, 12, 13, 14 et 15 carrés. Il démontre que dans toute décomposition du rectangle en carrés inégaux il y a au moins 3 carrés intérieurs.

SÉANCE DU 21 MARS 1947

R. S. Ingarden. *On the stigmatic representation of space in the Electron Microscope*.

In 1854 J. C. Maxwell constructed an example of a medium giving perfect (stigmatic) optical representation of space (s. c. Maxwell's „fish eye"). This result has been generalised by W. Lenz in 1928, but the existence of other media with this property remains open to discussion. It is only known that according to the general theorem of J. C. Maxwell, F. Klein and C. Carathéodory the stigmatic representation of space must be conformal. The aim of this contribution is to investigate the problem of the existence of a medium giving perfect representation of space which can be realised in the electron microscope. It can be easily shown that neither in an electrostatic nor in an electromagnetic system the Maxwell-Lenz media can be produced. In the case of an electrostatic electron microscope it is possible to deduce the differential equations for the potential distribution which must be fullfilled if a perfect representation of space should be secured [11].

SÉANCE DU 28 MARS 1947

S. Hartman. *Remarque sur les approximations diophantiques linéaires homogènes*.

Soient $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_m$ des nombres indépendants et $\varepsilon > 0$. Il y a, comme on sait, une infinité des nombres naturels n pour lesquels il existe des entiers $p_1, p_2, \ldots, p_m$ tels que l'on a $|n\vartheta_i - p_i| < \varepsilon$ pour $i = 1, 2, \ldots, m$.

[11]) In a report read by the author at the V Polish Mathematical Congress in Cracow May 29th 1947 it was shown that these equations have no solution. This result in a more general form will be published in full in „Prace Matematyczno-Fizyczne", Warsaw 1948.

Soit $n_1, n_2, \ldots$ la suite de tous les nombres n de ce genre. Alors on a $n_k < k/\varepsilon$ pour $k = 1, 2, \ldots$

J. Perkal. *Sur la subdivision des ensembles en parties de diamètre inférieur*.

K. Borsuk [12]) a posé le problème si tout ensemble E situé dans l'espace euclidien à n dimensions se laisse subdiviser en $n+1$ parties dont les diamètres sont plus petits que celui de E.

La réponse est affirmative, entre autres:

1⁰ dans le cas où il existe un sur-ensemble V de E de largeur constante, de diamètre égal à celui de E et tel que la frontière de V admet en chaque point exactement 1 hyperplan osculateur;

2⁰ dans le cas où E contient les sommets d'un simplexe régulier à n où $n-1$ dimensions de diamètre égal à celui de E;

3⁰ dans tous les cas où $n = 3$.

SÉANCE DU 18 AVRIL 1947

M. Nosarzewska. *Évaluation de la différence entre l'aire d'une région plane convexe quelconque et le nombre des points aux coordonnées entières couverts par elle*.

En réponse à la question posée par H. Steinhaus, on peut montrer que l'évaluation donnée par V. Jarník dans son théorème sur les points aux coordonnées entières [13]) se laisse améliorer pour les régions convexes:

Théorème. I étant une région plane convexe, a — l'aire de I, l — la longueur de sa frontière et w le nombre des points aux coordonnées entières situés dans I, on a

$$-(\tfrac{1}{2}l + 1) < a - w < \tfrac{1}{2}l.$$

Cette évaluation est précise.

M. Warmus. *Évaluation des différences entre l'aire des régions planes et le nombre des points aux coordonnées entières couverts par elles*.

Soient: a l'aire d'une région plane délimitée par une courbe de Jordan rectifiable, l la longueur de cette courbe et w le nombre des points aux coordonnées entières situés dans la région.

[12]) K. Borsuk, *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre*, Fundamenta Mathematicae 20 (1933), p. 177-190, en particulier p. 190.

[13]) voir ce volume, p. 1.

Théorème. Si $l > \pi$, on a

$$(*)\qquad -cl-1 \leqslant a-\text{w} \leqslant cl-1,$$

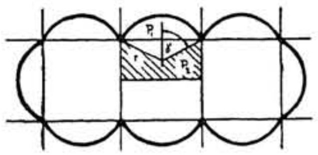
c étant une constante définie par l'équation

$$c=\frac{1}{2\sin\gamma} \qquad \text{où} \qquad \gamma-2\sin^2\gamma+\sin\gamma\cos\gamma=0.$$

Les valeurs approchées des constantes c et γ sont les suivantes:

$$\gamma=59^\circ 04' 51{\cdot}6...''=1{,}03115798..., \qquad c=0{,}5828222...$$

Ces constantes ont une signification géométrique. Soit p. ex. I la région intérieure à la courbe composée d'arcs égaux de cercle appuyés sur des sommets du réseau (voir figure), l'angle d'ouverture de chaque arc étant 2γ. *Le rayon r de ces arcs est alors égal à c et l'aire du secteur P_1 est égale à celle du pentagone P_2.*



La région I réalise le cas limite où $\text{w}=0$ et $a=cl-1$.

L'évaluation (*) est la plus précise parmi celles du type

$$-c_1 l-k_1 < a-\text{w} < c_2 l-k_2,$$

c'est-à-dire qu'il est impossible de donner une évaluation de ce type avec $c_1 < c$ ou $c_2 < c$, pas plus qu'avec $c_1=c=c_2$ et $k_1 < 1$ ou $k_2 > 1$. Il est pourtant possible — comme l'a montré M-elle Nosarzewska dans la communication qui précède — d'améliorer l'évaluation dans le cas des régions convexes.

On peut étendre l'évaluation (*) sur les domaines ouverts sommes d'un nombre fini de composantes et sur les régions dont le complémentaire en est une. On parvient ainsi à l'évaluation du type

$$-cl-k_1 \leqslant a-\text{w} \leqslant cl-k_2$$

où k_1 et k_2 sont des nombres entiers.

SÉANCE DU 25 AVRIL 1947

W. Wolibner (Staszów). *Les recherches de L. Lichtenstein concernant l'application de la loi généralisée de la gravitation au système infini des masses placées aux sommets d'un réseau quadratique* (Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres, à paraître).

L'auteur envisage les résultats non publiés de Leon Lichtenstein qu'il a reconstruits. Il s'agit du mouvement des masses homogènes ayant au moment initial la forme des sphères égales, de centres situés aux sommets d'un quadrillage plan infini. Lichtenstein donne la solution du problème pour l'intervalle court de temps en se servant d'une généralisation, introduite par lui antérieurement, des forces de gravitation exercées par les masses infinies et en omettant l'action de la pression.

SÉANCE DU 10 MAI 1947

M. Biernacki (Lublin). *Sur les bornes de la courbure des cercles ou des sphères qui passent par 3 ou 4 points d'un continu.*

Soient U et u les bornes supérieure et inférieure respectivement de la courbure des circonférences qui passent par au moins 3 points d'un continu borné. W et w ayant la signification analogue relativement aux sphères qui passent par au moins 4 points d'un tel continu, on a toujours $\text{w} \leqslant u$ et $W \leqslant U$.

Admettons que le continu ne contient pas d'arc de cercle dont la courbure est égale à la borne U ou u considérée. Alors, la borne $U < \infty$ ne peut être atteinte par un cercle qui passe par 3 points distincts du continu; si le continu est plan, on a le même énoncé relativement à la borne $u > 0$.

Si $W < \infty$ (et a fortiori si $U < \infty$), le continu est une courbe de Jordan qui possède partout une tangente variant continuement; si cette courbe est fermée, la borne U ne peut être atteinte que soit par un cercle qui passe par un seul point de la courbe, soit par un cercle C tangent en un point A à la courbe et qui passe par un autre point B de la courbe, AB étant un diamètre de C et la tangente à la courbe en B étant perpendiculaire à ce diamètre. Si le continu est une ovale qui possède partout une courbure continue, les bornes U et u ne peuvent être atteintes que par des cercles de courbure (ce qui permet de retrouver un théorème de Kubota [14])).

Admettons maintenant que le continu ne contient pas de portion (contenant plus d'un point) de surface sphérique dont la courbure est égale à la borne W ou w considérée. Si $W < \infty$ et si la courbe de Jordan à laquelle se réduit le continu est fermée,

[14]) Voir T. Kubota, Tohôku Math. Journal 47 (1940), p. 96-98; cf. aussi L. A. Santalo, ibidem 48 (1941), p. 64-67.

la borne W ne peut être atteinte que soit par une sphère qui passe par un seul point de la courbe, soit par une sphère doublement tangente à la courbe aux points diamétralement opposés de la sphère et qui ne passe pas par un troisième point de la courbe. Si $w > 0$, la borne w ne peut être atteinte par aucune sphère qui passe par 4 points distincts du continu.

J. G. Mikusiński (Lublin). *Sur les moyennes de la forme* $\psi^{-1}(\sum q\psi(x))$ (Studia Mathematica 10, à paraître).

SÉANCE DU 13 MAI 1947

H. Steinhaus. *Sur la loi des grands nombres.*

L'auteur énonce quelques théorèmes liés à la loi des grands nombres, entre autres les suivants:

I. $\{x_i(t)\}$ *étant une suite de fonctions réelles, mesurables* (L), *définies dans l'intervalle* $I=\langle 0,1\rangle$, *soit* $\{F_i(\alpha)\}$ *la suite de leurs distributrices, données par la formule*

$$F_i(\alpha)=|\underset{t}{E}\{x_i(t)<\alpha\}|,$$

où $|A|$ *désigne la mesure de* A. *Si les fonctions* $x_i(t)$ *sont indépendantes deux à deux et la limite*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[F_1(\alpha)+\ldots+F_n(\alpha)]=F(\alpha) \tag{1}$$

existe pour tout α (cette hypothèse étant satisfaite p. ex. lorsque tous les x ont la même distributrice $F(\alpha)$), *il existe un ensemble* $T\subset I$ *avec* $|T|=1$ *tel que la fréquence*

$$\underset{i}{\mathrm{fr}}\{x_i(t)<\alpha\}$$

existe pour tout $t\in T$ *et pour tout* α *réel et qu'elle est égale à* $F(\alpha)$:

$$\underset{i}{\mathrm{fr}}\{x_i(t)<\alpha\}=F(\alpha). \tag{2}$$

(La *fréquence* $\underset{i}{\mathrm{fr}}\{\ \}$ est définie comme la limite de la fréquence relative des nombres naturels i satisfaisant à l'inégalité $\{\ \}$.)

La réciproque de I est vraie sans l'hypothèse de l'indépendance:

II. *Si la fréquence* (2) *ne dépend pas de* t *pour* $t\in T_\alpha$, *où* $|T_\alpha|=1$, *on a* (1).

III. *Si* $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(\alpha)=F(\alpha)$ *pour tout* α *et les fonctions* $x_i(t)$ *sont indépendantes deux à deux, il existe dans le carré* $\langle 0\leqslant s\leqslant 1\rangle\times\langle 0\leqslant t\leqslant 1\rangle$

un ensemble plan Z *de mesure plane* $|Z|=1$ *tel que les suites* $\{x_i(s)\}$ *et* $\{x_i(t)\}$ *sont indépendantes pour tout point* $(s,t)\in Z$.

(On dit que deux suites numériques $\{a_i\}$ et $\{b_i\}$ sont *indépendantes* si l'on a

$$\underset{i}{\mathrm{fr}}\begin{Bmatrix}a_i<\alpha\\ b_i<\beta\end{Bmatrix}=\underset{i}{\mathrm{fr}}\{a_i<\alpha\}\cdot\underset{i}{\mathrm{fr}}\{b_i<\beta\}$$

pour tout couple α,β de nombres réels.)

SÉANCE DU 16 MAI 1947

A. Alexiewicz (Poznań). *Sur les suites d'opérations* (Studia Mathematica 10, à paraître).

SÉANCE DU 23 MAI 1947

G. Choquet (Paris). *Sur le problème de la poursuite.*

M. Warmus. *Sur un problème concernant les réseaux plans.*

Etant donné sur le plan un réseau rhomboïdal et un système de coordonnées dont les axes appartiennent au réseau, on a le

Théorème. Il existe une transformation affine du plan en lui-même qui transforme l'ensemble des sommets du réseau en lui-même d'une manière biunivoque en altérant toutes les distances entre ces sommets.

Telle est la transformation

$$x'=x+my,\qquad y'=mx+(m^2+1)y$$

où m est un nombre naturel convenablement choisi. En particulier, si le réseau est quadratique, on peut poser $m=1$.

Le problème analogue pour les réseaux rectangulaires et ceux de parallélogrammes aux côtés commensurables se résout encore affirmativement par réduction au réseau rhomboïdal. Pour le réseau de parallélogrammes aux côtés incommensurables, il existe une transformation biunivoque de l'ensemble des sommets en lui-même qui y altère toutes les distances [15]). On ignore cependant s'il existe une transformation affine ayant cette propriété.

J. Perkal a signalé l'existence d'une transformation affine de l'ensemble des sommets du réseaux spacial cubique (c'est-à-dire des points de l'espace aux coordonnées entières) en lui-même qui altère toutes les distances de ces sommets. Telle est la transformation

$$x'=x+y+z,\qquad y'=x+2y+3z,\qquad z'=x+3y+6z.$$

[15]) Cela résulte d'un théorème établi par H. Steinhaus; cf. ce volume, p. 43.

SÉANCE DU 20 MAI 1947

G. Choquet (Paris). *Sur un théorème prolongeant les résultats de Baire et de Denjoy.*

SÉANCE DU 6 JUIN 1947

V. Hlavatý (Prague). *Sur les espaces reglés.*

J. Leray (Paris). *Sur le prolongement des travaux de Tchapliguine sur les fluides compressibles.*

SÉANCE DU 13 JUIN 1947

A. Wilkoński. *Sur une évaluation des modules de racines des équations du 4-me degré.*

SÉANCE DU 20 JUIN 1947

E. Marczewski. *L'histoire des mathématiques en Pologne* (à paraître dans un livre collectif consacré à l'histoire de la science polonaise à l'occasion du jubilé de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres).

CHRONIQUE

DÉBUTS DE L'UNIVERSITÉ ET DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE WROCŁAW

Fragments du discours d'inauguration prononcé par M. le Recteur S. Kulczyński à la séance publique solennelle le 9 juin 1946 [1]).

„Les écoles supérieures, en tant qu'unités juridiques, naîssent des actes législatifs, mais en tant que centres du travail scientifique, elles se développent d'une tradition des longues années d'efforts. L'Université et l'École Polytechnique de Wrocław ne sont âgées, comme organismes juridiques, que d'une année à peine, mais comme entités scientifiques, elles ressortent des traditions de Lwów, vieilles et éprouvées. Bien que le corps de nos collègues se soit enrichi des hommes de science éminents et nombreux, venus de Wilno, de Varsovie, de Cracovie et de Poznań, le noyau de notre milieu scientifique, de même que celui de notre jeunesse, provient d'outre le Boug. Matériellement, nous sommes héritiers des ruines des l'Université allemande et de l'École Polytechnique allemande de Wrocław, mais moralement nous le sommes de la culture limitrophe léopolitaine. C'est pourquoi notre première pensée se porte vers ce matin mémorable du 4 juillet 1941 à Lwów où l'acte publique des Écoles Supérieures de cette ville a eu lieu, l'acte sanglant et profondément lié par sa teneur à celui que nous célébrons aujourd'hui. Les Écoles Supérieures de Lwów se sont trouvées ce jour-là non pas sur le podium du grand auditoire, mais devant le mur d'une sablière de banlieue; non pas en face des autorités et les représentants de la nation polonaise, mais devant les autorités et les représentants de la nation allemande. De cette fête, le régisseur a été Himmler, et l'exécuteur — l'Allemand Otto Krüger, alors chef de la Gestapo à Lwów, plus tard l'assassin de 250 instituteurs d'écoles à Stanisławów. Malgré le temps qui se soit écoulé depuis cette heure, nous nous en rappelons. Nous voyons s'affaisser sur les genoux et s'ébouler dans la fosse le dernier recteur de Lwów, Romain

[1]) Cité d'après *Wrocławski Kalendarz Akademicki na rok 1947,* p. 57-64 (en polonaise).