de sorte que la formule (6), où le diamètre s_1 est celui de la section déterminée par le rapport

$$\alpha_1 : (1-\alpha_1) = 0{,}47247\ldots : 0{,}52753\ldots,$$

donne le volume du tronc avec l'erreur relative ne surpassant pas $0{,}0045 = 0{,}45\%$.

3. Les forestiers ont parfois l'habitude de simplifier les calculs en considérant l'angle entre la génératrice et la base du tronc comme une grandeur constante pour le bois de même espèce et de même provenance. Il s'ensuit que

$$\frac{h}{R-r} = k = \text{const.}$$

En désignant par s le diamètre de la section médiane ($\alpha = 1/2$), on obtient alors de $s = R + r$ et de (4):

$$V = \frac{\pi}{4} h s^2 + \frac{\pi}{12 k^2} h^3.$$

On peut donc se servir de la formule (1) en y apportant une correction cubique, qui n'exige que la sommation des cubes de toutes les longueurs des troncs et une seule multiplication par le coefficient $\pi/12k^2$. Ce dernier peut être déterminé empiriquement, p. ex. par les mesures h_1, R_1, r_1, h_2, R_2, r_2, $\ldots$, h_n, R_n, r_n de quelques troncs; on aura alors approximativement

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{n} \frac{\sum_1^n R_i - \sum_1^n r_i}{\sum_1^n h_i}.$$

PROBLÈMES

H. STEINHAUS (WROCŁAW)

P 1. Soit $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ le développement d'un nombre transcendant en fraction décimale. Est-ce que $0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \ldots$ l'est également?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 1, 2. VII. 1946

G. CHOQUET (PARIS)

P 2. Soit E un espace métrique compact. Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout recouvrement ouvert fini de E par des ensembles E_i, de diamètre inférieur à ε, on désigne par δ_i le diamètre de la *frontière* de E_i. Posons $A(\varepsilon) = \text{borne inf}\left(\sum \delta_i^2\right)$ pour tous les recouvrements ouverts relatifs à ε. Et posons $A = \lim_{\varepsilon \to 0} A(\varepsilon)$.

Montrer que $A = 0$ pour tout espace E de dimension 1 au sens de Menger.

Nouveau Livre Écossais, Probl. 4, 5. VII. 1946

E. MARCZEWSKI (WROCŁAW)

P 3. Soit K un corps dénombrablement additif composé de sous-ensembles d'un ensemble fixe X. Soit $m(E)$ une mesure dénombrablement additive dans K et normée, c'est-à-dire telle que $m(X) = 1$.

Deux familles d'ensembles $P_1 \subset K$ et $P_2 \subset K$ s'appellent *stochastiquement indépendantes par rapport à* m lorsque $m(E_1 \cdot E_2) = m(E_1) \cdot m(E_2)$ pour tout couple d'ensembles E_1, E_2 où $E_1 \in P_1$ et $E_2 \in P_2$.

Deux fonctions à valeurs réelles $f_1(x)$ et $f_2(x)$, définies pour $x \in X$ et mesurables (K) (c'est-à-dire telles que $f_1^{-1}(J) \in K$ et $f_2^{-1}(J) \in K$ pour tout intervalle J) s'appellent *stochastiquement indépendantes par rapport à m au sens de Kolmogoroff* lorsque, E parcourant les ensembles arbitraires de nombres réels, les familles de toutes les images réciproques $f_1^{-1}(E)$ et $f_2^{-1}(E)$ qui appartiennent à K sont stochastiquement indépendantes par rapport à m.

Les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ s'appellent *stochastiquement indépendantes par rapport à m au sens de Steinhaus* lorsque, J parcourant les intervalles, les familles des images réciproques $f_1^{-1}(J)$ et $f_2^{-1}(J)$ sont stochastiquement indépendantes par rapport à m.

Les fonctions stochastiquement indépendantes au sens de Kolmogoroff le sont donc à plus forte raison au sens de Steinhaus.

Est-ce que le théorème réciproque est aussi vrai?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 5, 7. VII. 1946

P 3, R 1. Dans le cas particulier où m est la mesure de Lebesgue et X — l'intervalle (0,1), la réponse est positive. Voir S. Hartman, ce volume, p. 19-22.

B. KNASTER (WROCŁAW)

P 4. Le théorème de K. Borsuk et S. Ulam [1]) sur les antipodes a été généralisé par H. Hopf [2]) comme suit.

Etant donnés un couple de points p_1, p_2 de la surface sphérique à n dimensions S_n et une fonction continue $f(p)$ transformant S_n en sous-ensemble de l'espace euclidien à n dimensions E_n, il existe sur S_n un couple de points q_1, q_2 isométrique (congruent) à p_1, p_2 et dont l'image dans E_n est un point:

$$f(q_1) = f(q_2).$$

M. H. Steinhaus m'a posé en 1942 le problème de démontrer qu'étant donné un trépied (pas nécessairement à pointes équidistantes) se laissant placer à la surface d'un continent, il y a un endroit sur la Terre où il se laisse placer horizontalement. J'ai remarqué qu'on peut en dégager, entre autres, le problème topologique suivant.

Etant donnés un triple de points p_1, p_2, p_3 sur S_2 et une fonction continue $f(p)$ où p parcourt S_2, telle que $f(S_2) \subset E_1$, existe-t-il sur S_2 un triple de points q_1, q_2, q_3 isométrique à p_1, p_2, p_3 et ayant l'image commune sur la droite E_1:

$$f(q_1) = f(q_2) = f(q_3)?$$

[1]) K. Borsuk, *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre*, Fundamenta Mathematicae 20 (1933), p. 178, Satz II. Ce théorème est connu sous le nom d'„Antipodensatz".

[2]) H. Hopf, *Eine Verallgemeinerung bekannter Abbildungs- und Überdeckungssätze*, Portugalliae Mathematica 4 (1944), p. 131.

Ce problème reste ouvert.

D'une façon plus générale, est-il-vrai qu'étant donnés un ensemble de k points $p_1 p_2, \ldots, p_k$ sur S_n et une fonction continue $f(p)$ où p parcourt S_n, telle que $f(S_n) \subset E_{n-k+2}$ où $k = 2, 3, \ldots, n+1$, il existe sur S_n un ensemble de points $q_1, q_2, \ldots, q_k$ isométrique à $p_1, p_2, \ldots, p_k$ et qui ont la même image dans E_{n-k+2} ? Et combien y a-t-il des tels ensembles?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 7, 29. XI. 1946

H. STEINHAUS (WROCŁAW)

P 5. Le paraboloïde de révolution admet en tout point une infinité de coupures planes congruentes. Il partage cette propriété avec la sphère et le plan. Y a-t-il d'autres surfaces ayant la même propriété?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 8, 30. XI. 1946

A. MOSTOWSKI (VARSOVIE)

P 6. On peut faire correspondre au nombre réel $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i}$ (avec $c_i = 0$ ou 2) la relation R_x entre les nombres naturels définie par la formule:

$$mR_x n \equiv [c_{2^m(2n-1)} = 2],$$

L'ensemble des x pour lesquels R_x établit une bonne ordination de l'ensemble des nombres naturels en un type $\alpha < \Omega$ est borelien. Soit ξ_α sa classe borelienne. Pour quels α a-t-on $\xi_\alpha > \omega$?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 11, 12. XII. 1946

S. GOŁĄB (CRACOVIE)

P 7. Les espaces riemanniens sont-ils les seuls où la métrique angulaire au sens de Bliss coïncide avec celle au sens de Landsberg-Berwald? Ce problème a été posé au Congrès International des Mathématiciens à Zürich en 1932.

Nouveau Livre Écossais, Probl. 12, 12. XII. 1946

Z. ZAHORSKI (CRACOVIE)

P 8. Il est facile de montrer que toute fonction lisse (c.-à-d. satisfaisant à la condition $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h}=0$ pour tout x) qui est mesurable, est de I-e classe de Baire. Est-ce que toute fonction lisse est mesurable?

P 9. Il est facile de montrer que l'ensemble D_f des points où la fonction lisse et continue $f(x)$ admet la dérivée est de puissance du continu et que toute dérivée intermédiaire (c'est-à-dire toute fonction $g(x)$ telle que $\underline{f}'(x)\leqslant g(x)\leqslant \overline{f}'(x)$) satisfait à la condition de Darboux, ne prenant d'ailleurs les valeurs intermédiaires entre deux valeurs données qu'aux points $x\in D_f$. Quelle est la catégorie et la mesure de D_f?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 16, 13. XII. 1946

J. BONDER (GLIWICE)

P 10. Soit AB un bilatère situé dans le plan $z=x+iy$ et formé de deux arcs analytiques réguliers (sans autres points communs que les extrémités A et B) donnés par les équations paramétriques:

(1) $\quad x=g_1(t),\qquad y=h_1(t),\qquad -\infty\leqslant t\leqslant 0,$

(2) $\quad x=g_2(t),\qquad y=h_2(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant +\infty.$

Exprimer la fonction $z=F(t)$ transformant de façon biunivoque et conforme le demi-plan supérieur des t

1⁰ en l'intérieur $\qquad$ 2⁰ en l'extérieur

du bilatère AB

dans une forme autant que possible „effective" au moyen de fonctions:

$$z=f_1(t)=g_1(t)+ih_1(t),\qquad z=f_2(t)=g_2(t)+ih_2(t),$$

comme d'éléments de départ.

Nouveau Livre Écossais, Probl. 26, 14. XII. 1946

W. SIERPIŃSKI (VARSOVIE)

P 11. Existe-t-il deux types ordinaux distincts divisibles mutuellement l'un par l'autre à la fois du côté droit et gauche?

P 12. Est-ce que, pour les types ordinaux, les égalités $\alpha=\xi\beta$ et $\beta=\alpha\varrho$ entraînent l'égalité $\alpha=\beta$?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 27 et 27a, 14. XII. 1946

V. JARNÍK (PRAGUE)

P 13. Soit $Q(u)=\sum_{i,k=1}^{r}a_{ik}u_iu_k$ (où $a_{ik}=a_{ki}$) une forme positive définie. Soit, pour $x>0$, $A_Q(x)$ le nombre des points à coordonnées entières situés dans l'ellipsoïde $Q(u)\leqslant x$ dont $J_Q(x)$ désigne le volume. Posons

$$P_Q(x)=A_Q(x)-J_Q(x).$$

On connaît pour $r\geqslant 5$ le théorème: si les a_{ik} sont des nombres entiers, on a $P_Q(x)=O(x^{r/2-1})$.

Est-ce que ce théorème est vrai pour les valeurs quelconques des coefficients (en supposant toujours, bien entendu, que la forme Q est positive définie)?

Il en est ainsi pour les formes diagonales, c'est-à-dire dans lesquelles $a_{ik}=0$ pour $i\neq k$, et même pour quelques formes plus générales.

Nouveau Livre Écossais, Probl. 33, 15. XII. 1946

H. STEINHAUS (WROCŁAW)

P 14. Le contour J de longueur l et d'aire a, jeté sur le plan, embrasse ϖ points aux coordonnées entières. M. Jarník a montré [1]) que $|a-\varpi|<l$. Trouver l'erreur moyenne de cette mensuration pour J convexes.

Nouveau Livre Écossais, Probl. 37, 23. I. 1947

[1]) Voir H. Steinhaus, *Sur un théorème de M. V. Jarník*, ce volume, p. 1.

S. HARTMAN (WROCŁAW)

P 15. Il est facile de montrer que

$$\liminf|\cos n|^n=\liminf|\sin n|^n=0,$$

plus difficile que $\limsup(\cos n)^n=1$ et encore plus difficile que $\limsup|\sin n|^n=1$.

Trouver:

$$\liminf (\cos n)^n, \quad \limsup (\sin n)^n \quad \text{et} \quad \liminf (\sin n)^n.$$

Nouveau Livre Écossais, Probl. 41, 9. III. 1947

S. MAZUR (ŁÓDŹ)

P 16. Soient: $\mathfrak{A}$ un groupe d'homéomorphies du plan et $\mathfrak{A}_0$ le sous-groupe de $\mathfrak{A}$ formé de toutes les homéomorphies appartenant à $\mathfrak{A}$ qui ont 0 comme point fixe. En admettant que $\mathfrak{A}$ contient toutes les translations et que $\mathfrak{A}_0$ est compact, $\mathfrak{A}$ se compose-t-il exclusivement de transformations linéaires?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 46, 2. V. 1946

P 16, R 1. Z. Charzyński annonce la solution par affirmative de ce problème. Pour l'espace à un nombre fini $n > 2$ de dimensions le problème analogue reste ouvert.

Nouveau Livre Écossais, 1. VIII. 1947

A. ALEXIEWICZ ET W. ORLICZ (POZNAŃ)

P 17. X et Y étant deux espaces métriques complets et R un ensemble de II-e catégorie dans X, il est facile de voir que le produit $R \times Y$ est de II-e catégorie dans $X \times Y$ sous l'hypothèse que l'un au moins des espaces X et Y est séparable ou que l'ensemble R satisfait à la condition de Baire. En est-il de même sans ces hypothèses?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 53, 17. V. 1947

C. KURATOWSKI (VARSOVIE)

P 18. Par définition, la limite inférieure topologique d'une suite d'ensembles $A_1, A_2, \ldots$ (situés dans un espace métrique ou topologique), en symbole: $\underset{n=\infty}{\mathrm{Li}} A_n$, est l'ensemble de tous les points p pour lesquels il existe une suite $p_1, p_2, \ldots$ telle que $p_n \in A_n$ et $p = \lim\limits_{n=\infty} p_n$. Est-il possible de définir $\underset{n=\infty}{\mathrm{Li}} A_n$ à l'aide des opérations de la Théorie des ensembles (différence, somme et produit dénombrables) et de l'opération $\overline{A}$ (fermeture de A) de la Topologie?

Il est à remarquer [1]) que la limite supérieure topologique de la suite en question (et qui est par définition l'ensemble de tous les points de la forme $p = \lim p_{k_n}$ où $p_{k_n} \in A_{k_n}$) se laisse définir de la sorte par la formule:

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{Ls}} A_n = \prod_{n=1}^{\infty} \overline{\sum_{m=0}^{\infty} A_{n+m}}.$$

Varsovie, 2. VI. 1947

---

[1]) F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 237 (4); cf. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne, vol. 3, Warszawa-Lwów 1933, p. 154, 8.

R. SIKORSKI (VARSOVIE)

P 19. Une suite transfinie $\{a_\eta\}$ du type α est dite *segment* de la suite $\{b_\eta\}$ du type β si $\alpha < \beta$ et $a_\eta = b_\eta$ pour $0 \leqslant \eta < \alpha$.

Etant donné un nombre transfini initial ω_μ, considérons pour tout $\xi < \omega_\mu$ un ensemble (non vide) Z_ξ de suites transfinies du type ξ (pas nécessairement toutes) aux termes 0 et 1. Admettons que toute suite du type α qui appartient à l'ensemble Z_α est, pour tout $\beta > \alpha$, segment d'au moins une suite du type β appartenant à l'ensemble Z_β et réciproquement que, pour tout $\alpha > \beta$, les segments du type α de toute suite du type β qui appartient à Z_β sont des éléments de Z_α.

Existe-t-il alors une suite S du type ω_μ aux termes 0 et 1 dont tout segment du type ξ est élément de l'ensemble Z_ξ (pour tout $\xi < \omega_\mu$)?

Varsovie, 20. VI. 1947

W. ŚLEBODZIŃSKI (WROCŁAW)

P 20. Trouver les conditions pour qu'il existe dans une variété riemannienne V_n une famille d'hypersurfaces $f = \text{const.}$ telles que le déplacement parallèle sur chacune d'elles soit intégrable, c'est-à-dire indépendant du chemin joignant deux points quelconques de l'hypersurface.

Wrocław, 9. IX. 1947
