Soient P et Q deux ensembles arbitraires situés sur l'axe y et dont les images réciproques $A=f^{-1}(P)$ et $B=g^{-1}(Q)$ sont mesurables. Nous avons à montrer que

$$|AB|=|A|\cdot|B|. \tag{6}$$

Etant donné un $\varepsilon>0$, il existe d'après III deux ensembles fermés M et N tels que:

$$f^{-1}(M)\subset A,\quad |A-f^{-1}(M)|<\varepsilon,\qquad g^{-1}(N)\subset B,\quad |B-g^{-1}(N)|<\varepsilon.$$

On en conclut facilement que:

$$0\leqslant|AB|-|f^{-1}(M)\cdot g^{-1}(N)|<2\varepsilon,\qquad 0\leqslant|A|\cdot|B|-|f^{-1}(M)|\cdot|g^{-1}(N)|<2\varepsilon. \tag{7}$$

Comme $|f^{-1}(M)\cdot g^{-1}(N)|=|f^{-1}(M)|\cdot|g^{-1}(N)|$ d'après II, on a $\big||AB|-|A|\cdot|B|\big|<2\varepsilon$ en vertu de (7).

Le nombre ε étant arbitraire, il en résulte la relation (6), c. q. f. d.

Remarques. 1. En particulier, pour fonctions indépendantes (S), l'égalité (1) subsiste lorsque $E_1,\ldots,E_k$ sont des ensembles boreliens arbitraires. Cette conséquence du théorème qui vient d'être démontré a été énoncée dans plusieurs travaux sans démonstration ou déduite de l'invariance de l'égalité (1) par rapport à l'addition et à la multiplication dénombrable d'ensembles. Cependant la démonstration directe de cette invariance n'est pas exempte de quelques difficultés.

2. La proposition III permet de montrer aisément que, pour tout ensemble mesurable (L) qui est l'image réciproque d'un ensemble P donnée par une fonction $f(x)$ mesurable (L), il existe un ensemble $M\subset P$ qui est un F_σ et pour lequel l'ensemble $f^{-1}(P)-f^{-1}(M)$ est de mesure lebesguienne nulle.

SUR LA CUBATURE DES TRONCS DE BOIS

PAR

H. STEINHAUS (WROCŁAW)

1. Les formules approchées pour le volume d'un cône tronqué sont d'importance pratique surtout quand il s'agit de calculer la cubature des troncs de bois.

La formule

$$V_*=\frac{\pi}{4}hs^2 \tag{1}$$

avec

$$s=R+r,$$

où le diamètre s de la section transversale du milieu résulte des mesures des rayons R et r des bases, est beaucoup employée dans l'industrie forestière et les tables donnant V_* en fonction de s et de la longueur h du tronc y sont d'usage constant.

Or, en remplaçant dans (1) $\pi/_4$ par 0,8, la formule obtenue

$$V^*=0{,}8\ hs^2 \tag{2}$$

a l'avantage sur la formule (1) d'être plus exacte dans l'intervalle

$$0{,}5\leqslant r/R\leqslant 1, \tag{3}$$

qui embrasse les cas pratiques les plus fréquents.

En effet, l'erreur de la formule (1) atteint dans l'intervalle (3) la valeur $^1/_{28}=3{,}57\,^0/_0$ du vrai volume, tandis que celle de la formule (2) reste au-dessous de $2\,^0/_0$. De plus, la formule (2) est facile à retenir et se prête à un calcul rapide aussi bien qu'à la construction des tables.

La démonstration est simple. La formule exacte

$$V=\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2) \tag{4}$$

donne $V_*\leqslant V$, l'égalité n'ayant lieu que pour le cylindre $(R=r)$ en vertu de l'inégalité

$$\frac{1}{4}(R+r)^2\leqslant\frac{1}{3}(R^2+Rr+r^2),$$

facile à vérifier. On a donc

$$f(\varrho)=\frac{V_*}{V}=\frac{3}{4}\left(\frac{1+2\varrho+\varrho^2}{1+\varrho+\varrho^2}\right)$$

avec

$$\varrho={}^r/R\leqslant 1.$$

La dérivée

$$f'(\varrho)=\frac{3}{4}\left(\frac{1-\varrho^2}{(1+\varrho+\varrho^2)^2}\right),$$

étant positive pour $0\leqslant\varrho<1$, $f(\varrho)$ croît avec ϱ de $f(0)={}^3/_4$ à $f(1)=1$.

L'erreur par défaut dans (1) atteint donc 25% dans le cas du cône ($r=0$). En nous bornant aux cas pratiques (${}^1/_2\leqslant\varrho\leqslant 1$), caractérisés par (3), on obtient

$$1=f(1)\geqslant f(\varrho)\geqslant f({}^1/_2)={}^{27}/_{28}=0{,}9643\ldots$$

Dans le cas extrême $\varrho={}^1/_2$, l'erreur par défaut est donc égale à ${}^1/_{28}\,V=0{,}0357\ldots\cdot V$; elle atteint donc $3{,}57\%$.

Pour améliorer l'approximation, considérons la grandeur

$$V^\bullet={}^{56}/_{55}\,V_*.$$

La fonction

$$g(\varrho)=\frac{V^\bullet}{V}={}^{56}/_{55}\frac{V_*}{V}={}^{56}/_{55}f(\varrho),$$

croît dans l'intervalle ${}^1/_2\leqslant\varrho\leqslant 1$ de ${}^{27}/_{28}\cdot{}^{56}/_{55}={}^{54}/_{55}$ à ${}^{56}/_{55}$, ce qui donne, en prenant $V^\bullet$ pour le volume, une erreur de $\pm\,{}^1/_{55}\,V$ dans les cas extrêmes. Cette erreur ne surpasse pas $1{,}818\%$ et comme le coefficient

$${}^{56}/_{55}\,\pi=3{,}1987\ldots$$

ne diffère de 3,2 que de $0{,}0013\ldots<0{,}182\%$, la formule

$$V^*=\frac{3{,}2}{4}hs^2=0{,}8\,hs^2,$$

c'est-à-dire la formule (2), représente le volume avec une erreur moindre que $(1{,}818+0{,}182)=2\%$.

2. La question s'impose si l'on peut obtenir une formule plus exacte que (2) en mesurant le diamètre non pas de la section médiane, mais de celle divisant la hauteur h en raison $\alpha:(1-\alpha)$ (en comptant de la base inférieure) et en choisissant un α approprié.

On verra que le diamètre s_2 déterminé par le rapport $\alpha:(1-\alpha)=$ $=47{,}723:52{,}277$ et substitué dans la formule

$$V_2=\frac{\pi}{4}hs_2^2 \tag{5}$$

donne une erreur moindre que $0{,}625\%$, et que le diamètre s_1 déterminé par la rapport $\alpha:(1-\alpha)=47{,}247:52{,}752$, quand on le substitue dans la formule

$$V_1=0{,}7818\,hs_1^2, \tag{6}$$

réduit l'erreur à $0{,}46\%<0{,}5\%$.

La formule (5), qui est plus précise que (2), est la meilleure quand on veut employer les tables courantes, tandis que la formule (6) est la plus précise, mais le coefficient n'y a ni la simplicité de celui de (2), ni l'avantage de figurer dans les tables. C'est pourquoi il est peu probable que la formule (6) puisse jouer un rôle pratique.

Pour démontrer ce qui vient d'etre affirmé au sujet de la précision des formules (5) et (6), remarquons d'abord que le diamètre de la section déterminée par le rapport $\alpha:(1-\alpha)$ est égal à

$$\alpha r+(1-\alpha)R.$$

Posons donc

$$V_\alpha=\pi h\,[\alpha r+(1-\alpha)R]^2. \tag{7}$$

Le quotient V_α/V est égal à

$$\varphi(\alpha,\varrho)=3\,\frac{[\alpha\varrho+1-\alpha]^2}{\varrho^2+\varrho+1},$$

où

$$\varrho={}^r/R\qquad\text{et}\qquad {}^1/_2\leqslant\varrho\leqslant 1.$$

Il s'agit de choisir α de manière à rendre la valeur de

$$\operatorname*{Max}_{1/2\leqslant\varrho\leqslant 1}|\varphi(\alpha,\varrho)-1|$$

aussi petite que possible. Or, $\alpha\varrho+1-\alpha$ étant positif, la dérivée

$$\frac{\partial\varphi(\alpha,\varrho)}{\partial\varrho}=3\,\frac{(\varrho^2+\varrho+1)(\alpha\varrho+1-\alpha)2\alpha-(\alpha\varrho+1-\alpha)^2(2\varrho+1)}{(\varrho^2+\varrho+1)^2}$$

ne s'annule que si l'on a

$$2\alpha(\varrho^2+\varrho+1)=(\alpha\varrho+1-\alpha)(2\varrho+1). \tag{8}$$

La racine

$$\varrho_0 = \frac{3\alpha - 1}{2 - 3\alpha}$$

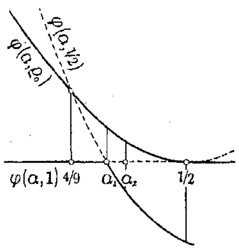
de l'équation (8) ne donne les valeurs extrêmes de la fonction $\varphi(\alpha, \varrho)$ que pour $^1/_2 \leqslant \varrho_0 \leqslant 1$, c'est-à-dire pour

$$(9) \qquad {}^4/_9 \leqslant \alpha \leqslant {}^1/_2,$$

et, pour un α fixe, $\varphi(\alpha, \varrho)$ peut prendre ses valeurs extrêmes aussi aux points $\varrho = {}^1/_2$ et $\varrho = 1$, bornes de l'intervalle (3). En substituant à ϱ successivement $^1/_2$, ϱ_0 et 1, on obtient les valeurs extrêmes de la fonction $\varphi(\alpha, \varrho)$ dans l'intervalle $^1/_2 \leqslant \varrho \leqslant 1$ comme trois fonctions de α:

$$\varphi(\alpha, {}^1/_2) = {}^8/_7 (\alpha - 2)^2, \qquad \varphi(\alpha, \varrho_0) = 4(3\alpha^2 - 3\alpha + 1), \qquad \varphi(\alpha, 1) = 1.$$

En prenant α pour abscisse et φ pour ordonnée, nous obtenons une représentation graphique de ces fonctions, où les traits continus correspondent aux valeurs extrêmes.



Comme on voit, le parcours du maximum $M(\alpha)$ et du minimum $m(\alpha)$ de φ est le suivant:

$$M(\alpha) = \begin{cases} \varphi(\alpha, {}^1/_2) & \text{pour} \quad 0 < \alpha \leqslant {}^4/_9, \\ \varphi(\alpha, \varrho_0) & \text{pour} \quad {}^4/_9 \leqslant \alpha \leqslant {}^1/_2, \\ 1 & \text{pour} \quad {}^1/_2 \leqslant \alpha; \end{cases}$$

$$m(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad 0 < \alpha \leqslant \alpha_1, \\ \varphi(\alpha, {}^1/_2) & \text{pour} \quad \alpha_1 \leqslant \alpha. \end{cases}$$

Ici, α_1 désigne la plus petite des racines de l'équation $\varphi(\alpha, {}^1/_2) = 1$, à savoir

$$\alpha_1 = 0{,}47247\ldots$$

La condition (9) exclut les branches de la parabole $\varphi = \varphi(\alpha, \varrho_0)$ au delà de $\alpha = {}^4/_9$ et de $\alpha = {}^1/_2$. A gauche de α_1, le maximum croît avec α décroissant et le minimum garde la valeur constante 1; à droite de $\alpha = {}^1/_2$, le maximum est constamment égal à 1 et le minimum décroit avec α croissant. Par conséquent, la recherche de la valeur de α qui réduise au minimum l'erreur de la formule (7) au sens défini plus haut peut être restreinte à l'intervalle $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant {}^1/_2$. On a dans cet intervalle

$$M(\alpha) = \varphi(\alpha, \varrho_0), \qquad m(\alpha) = \varphi(\alpha, {}^1/_2).$$

Choisissons α de manière que l'on ait

$$(10) \qquad M(\alpha) - 1 = 1 - m(\alpha),$$

c'est-à-dire que l'erreur extrême par excès soit égale à celle par défaut. L'équation (10) équivaut à

$$4(3\alpha^2 - 3\alpha + 1) - 1 = 1 - {}^8/_7 (\alpha - 2)^2$$

et donne pour α la valeur

$$\alpha_2 = 0{,}47723\ldots$$

C'est bien l'optimum de la formule (7), car à gauche de α_2 c'est l'excès $M - 1$ et à droite c'est le défaut $1 - m$ qui croît. Leur valeur commune pour $\alpha = \alpha_2$ est égale à

$$1 - {}^8/_7 (\alpha_2 - 2)^2 = 1 - 0{,}99378\ldots = 0{,}00621\ldots$$

Il est ainsi établi qu'en divisant le tronc en raison

$$\alpha_2 : (1 - \alpha_2) = 0{,}47723\ldots : 0{,}52277\ldots,$$

l'erreur relative ne dépasse pas 0,00622; elle est donc moindre que $6^1/_4$ pour mille.

Ce résultat est susceptible d'amélioration par une correction du coefficient, comme nous l'avons faite pour $\alpha = 0{,}5$. Introduisons le facteur $\dfrac{2}{M + m}$, qui réduit le maximum à $\dfrac{2M}{M + m}$ et le minimum à $\dfrac{2m}{M + m}$. L'excès et le défaut deviennent égaux à

$$(11) \qquad \frac{2M}{M + m} - 1 = \frac{M - m}{M + m}.$$

Dans l'intervalle $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant {}^1/_2$, les fonctions $M(\alpha)$ et $m(\alpha)$ sont positives et décroissantes; leur différence

$$M(\alpha) - m(\alpha) = 11^4/_7\, \alpha^2 - 10^2/_7\, \alpha + {}^{18}/_7$$

est positive et croissante. La fraction (11) prend donc sa valeur minimum pour $\alpha = \alpha_1$. Or:

$$M(\alpha_1) = 1{,}0091\ldots, \qquad m(\alpha_1) = 1,$$

$$\frac{M(\alpha_1) - m(\alpha_1)}{M(\alpha_1) + m(\alpha_1)} = 0{,}0045\ldots, \qquad \frac{2}{M(\alpha_1) + m(\alpha_1)} = \frac{2}{2{,}0091\ldots},$$

$$\pi' = \frac{2}{M + m}\pi = 3{,}12736\ldots, \qquad \frac{\pi'}{4} = 0{,}7818\ldots,$$

de sorte que la formule (6), où le diamètre s_1 est celui de la section déterminée par le rapport

$$a_1:(1-a_1)=0{,}47247\ldots:0{,}52753\ldots,$$

donne le volume du tronc avec l'erreur relative ne surpassant pas $0{,}0045=0{,}45^0/_0$.

3. Les forestiers ont parfois l'habitude de simplifier les calculs en considérant l'angle entre la génératrice et la base du tronc comme une grandeur constante pour le bois de même espèce et de même provenance. Il s'ensuit que

$$\frac{h}{R-r}=k=\text{const.}$$

En désignant par s le diamètre de la section médiane $(a={}^1/_2)$, on obtient alors de $s=R+r$ et de (4):

$$V=\frac{\pi}{4}hs^2+\frac{\pi}{12k^2}h^3.$$

On peut donc se servir de la formule (1) en y apportant une correction cubique, qui n'exige que la sommation des cubes de toutes les longueurs des troncs et une seule multiplication par le coefficient $\pi/12k^2$. Ce dernier peut être déterminé empiriquement, p. ex. par les mesures h_1, R_1, r_1, h_2, R_2, r_2, $\ldots$, h_n, R_n, r_n de quelques troncs; on aura alors approximativement

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{n}\,\frac{\sum\limits_1^n R_i-\sum\limits_1^n r_i}{\sum\limits_1^n h_i}.$$