Cette formule et le théorème 2 entraînent directement le

Théorème 3. Pour que la distributrice d'une fonction f relativement mesurable (définie pour $x \geqslant 0$) soit continue, il faut et il suffit que:

(a) *la suite des distributrices approchées soit uniformément convergente dans chaque intervalle fini,*

(b) $\mathrm{mes}_R[f^{-1}(a)] = 0$ *pour tout a réel.*

Remarque. D'après la remarque concernant les théorèmes du N°1, si la condition (a) est remplie, la convergence (*) est uniforme dans chaque intervalle fini.

Wrocław, le 23 janvier 1947.

SUR DEUX NOTIONS DE FONCTIONS INDÉPENDANTES

PAR

S. HARTMAN (WROCŁAW).

MM. Steinhaus et Kac[1]) se servent de la définition suivante de la notion d'indépendance de fonctions: un système (A) de fonctions réelles $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ mesurables (L) définies dans l'intervalle (0,1) s'appelle système de fonctions *stochastiquement* (ou *statistiquement*) *indépendantes* si, pour tout système de $k \leqslant n$ fonctions $f_{i_1}(x), \ldots, f_{i_k}(x)$ du système (A) et tout système $E_1, \ldots, E_k$ d'intervalles de l'axe y (ouverts, semi-ouverts ou fermés; finis ou infinis), on a l'égalité:

$$|f_{i_1}^{-1}(E_1) \cdot \ldots \cdot f_{i_k}^{-1}(E_k)| = |f_{i_1}^{-1}(E_1)| \cdot \ldots \cdot |f_{i_k}^{-1}(E_k)|, \tag{1}$$

$|\ |$ désignant la mesure de Lebesgue.

Les fonctions indépendantes dans ce sens seront dites ici *indépendantes* (S).

M. Kolmogoroff[2]) donne une définition plus restreinte de l'indépendance de fonctions. Elle diffère de celle de l'indépendance (S) en ce que $E_1, \ldots, E_k$ y sont entendus comme des ensembles arbitraires de l'axe y (même non mesurables), mais dont les images réciproques $f_{i_1}^{-1}(E_1), \ldots, f_{i_k}^{-1}(E_k)$ sont mesurables.

Les fonctions indépendantes dans ce sens seront dites ici *indépendantes* (K).

M. Kolmogoroff applique sa définition non seulement aux fonctions réelles d'une variable réelle et à la mesure lebesguienne, mais aussi aux fonctions réelles définies dans un espace abstrait X et à la mesure abstraite μ dénombrablement additive, telle que $\mu(X) = 1$. Evidemment, la définition (S) se prête à la même généralisation et on voit aussitôt que l'indépendance (K) entraîne l'indépendance (S) dans tous les cas.

---

[1]) M. Kac, *Sur les fonctions indépendantes (V)*, Studia Math. 6 (1936), p. 47.

[2]) A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Ergebn. der Mathematik, Vol. II (1933), p. 50.

M. Marczewski a posé le problème de l'implication réciproque [3]). Cette question reste ouverte; je n'en donne ici la solution que pour le cas particulier de la mesure μ lebesguienne.

Je vais établir d'abord trois propositions suivantes, faciles à prouver:

I. Etant données deux fonctions réelles $f(x)$ et $g(x)$, indépendantes (S) et mesurables (L), on a l'égalité:

$$|f^{-1}(U)\cdot g^{-1}(V)| = |f^{-1}(U)|\cdot|g^{-1}(V)| \tag{2}$$

pour tout couple d'ensembles U et V ouverts.

En effet, chacun de ces ensembles étant somme d'intervalles ouverts disjoints:

$$U=\sum_i I_i, \qquad V=\sum_j J_j,$$

on a, en tenant compte de l'indépendance (S) des fonctions $f(x)$ et $g(x)$:

$$|f^{-1}(U)\cdot g^{-1}(V)| = |\sum_{ij} f^{-1}(I_i)\cdot g^{-1}(J_j)| = \sum_{ij}|f^{-1}(I_i)\cdot g^{-1}(J_j)| =$$

$$=\sum_{ij}|f^{-1}(I_i)|\cdot|g^{-1}(J_j)| = \sum_i|f^{-1}(I_i)|\cdot\sum_j|g^{-1}(J_j)| =$$

$$=|\sum_i f^{-1}(I_i)|\cdot|\sum_j g^{-1}(J_j)| = |f^{-1}(U)|\cdot|g^{-1}(V)|.$$

II. Dans les mêmes hypothèses, l'égalité (2) subsiste en y remplaçant les ensembles ouverts U et V par des ensembles fermés M et N.

En effet, désignons par I l'intervalle (0,1) et posons:

$$U=I-M, \qquad V=I-N.$$

Il vient en vertu de (2), U et V étant ouverts:

$$|f^{-1}(M)\cdot g^{-1}(N)| = |I-[f^{-1}(U)+g^{-1}(V)]| =$$

$$=1-|f^{-1}(U)|-|g^{-1}(V)|+|f^{-1}(U)\cdot g^{-1}(V)| =$$

$$=1-|f^{-1}(U)|-|g^{-1}(V)|+|f^{-1}(U)|\cdot|g^{-1}(V)| =$$

$$=|f^{-1}(M)|-|g^{-1}(V)|\cdot[1-|f^{-1}(U)|] =$$

$$=|f^{-1}(M)|-|g^{-1}(V)|\cdot|f^{-1}(M)| = |f^{-1}(M)|\cdot|g^{-1}(N)|.$$

[3]) Ce volume, p. 29-30, P 3.

III. Soit $f(x)$ une fonction mesurable (L) définie dans l'intervalle $I=(0,1)$. Soit P un ensemble quelconque situé sur l'axe y et dont l'image réciproque est mesurable (L). Il existe alors pour tout $\varepsilon>0$ un ensemble fermé $M\subset P$ tel que

$$|f^{-1}(P)-f^{-1}(M)|<\varepsilon.$$

En effet, il existe [4]) pour tout $\varepsilon>0$ un ensemble fermé $C\subset I$ tel que

$$|I-C|<\varepsilon/2 \tag{3}$$

et sur lequel la fonction $f(x)$, considérée comme fonction partielle définie sur C, est continue. Désignons par $\varphi(x)$ cette fonction partielle.

Comme mesurable (L), l'ensemble $C\cdot f^{-1}(P)$ contient un ensemble fermé K tel que

$$|C\cdot f^{-1}(P)-K|<\varepsilon/2. \tag{4}$$

Comme $K\subset C$, on a $f(K)=\varphi(K)$. Posons:

$$M=f(K).$$

Comme image continue d'un ensemble compact, l'ensemble M est fermé. D'autre part, $f^{-1}(M)\subset f^{-1}(P)$ et $K\subset\varphi^{-1}(M)$. Ainsi:

$$K\subset\varphi^{-1}(M)\subset f^{-1}(M)\subset f^{-1}(P). \tag{5}$$

On a $|f^{-1}(P)-K|<\varepsilon$ en vertu de (3) et (4); par suite, en appliquant (5), on obtient:

$$|f^{-1}(P)-f^{-1}(M)|<\varepsilon,$$

ce qui achève la démonstration de III.

Théorème. La notion d'indépendance (S) équivaut à celle d'indépendance (K) pour les fonctions réelles définies dans l'intervalle (0,1), *la mesure étant entendue au sens de Lebesgue.*

Démonstration. Il suffit de montrer que l'indépendance (S) entraîne l'indépendance (K) pour le système (A) composé de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$; l'extension à $n>2$ fonctions ne comporte pas de difficultés essentielles.

[4]) En vertu du théorème de N. Lusin (voir p. ex. S. Saks, *Theory of the Integral*, Monografie Matematyczne, Tome 7, 1937, p. 72).

Soient P et Q deux ensembles arbitraires situés sur l'axe y et dont les images réciproques $A = f^{-1}(P)$ et $B = g^{-1}(Q)$ sont mesurables. Nous avons à montrer que

$$|AB| = |A| \cdot |B|. \tag{6}$$

Etant donné un $\varepsilon > 0$, il existe d'après III deux ensembles fermés M et N tels que:

$$f^{-1}(M) \subset A, \quad |A - f^{-1}(M)| < \varepsilon, \quad g^{-1}(N) \subset B, \quad |B - g^{-1}(N)| < \varepsilon.$$

On en conclut facilement que:

$$0 \leqslant |AB| - |f^{-1}(M) \cdot g^{-1}(N)| < 2\varepsilon, \quad 0 \leqslant |A| \cdot |B| - |f^{-1}(M)| \cdot |g^{-1}(N)| < 2\varepsilon. \tag{7}$$

Comme $|f^{-1}(M) \cdot g^{-1}(N)| = |f^{-1}(M)| \cdot |g^{-1}(N)|$ d'après II, on a $\big||AB| - |A| \cdot |B|\big| < 2\varepsilon$ en vertu de (7).

Le nombre ε étant arbitraire, il en résulte la relation (6), c. q. f. d.

Remarques. 1. En particulier, pour fonctions indépendantes (S), l'égalité (1) subsiste lorsque $E_1, \ldots, E_k$ sont des ensembles boreliens arbitraires. Cette conséquence du théorème qui vient d'être démontré a été énoncée dans plusieurs travaux sans démonstration ou déduite de l'invariance de l'égalité (1) par rapport à l'addition et à la multiplication dénombrable d'ensembles. Cependant la démonstration directe de cette invariance n'est pas exempte de quelques difficultés.

2. La proposition III permet de montrer aisément que, pour tout ensemble mesurable (L) qui est l'image réciproque d'un ensemble P donnée par une fonction $f(x)$ mesurable (L), il existe un ensemble $M \subset P$ qui est un F_σ et pour lequel l'ensemble $f^{-1}(P) - f^{-1}(M)$ est de mesure lebesguienne nulle.

SUR LA CUBATURE DES TRONCS DE BOIS

PAR

H. STEINHAUS (WROCŁAW)

1. Les formules approchées pour le volume d'un cône tronqué sont d'importance pratique surtout quand il s'agit de calculer la cubature des troncs de bois.

La formule

$$V_* = \frac{\pi}{4} h s^2 \tag{1}$$

avec

$$s = R + r,$$

où le diamètre s de la section transversale du milieu résulte des mesures des rayons R et r des bases, est beaucoup employée dans l'industrie forestière et les tables donnant V_* en fonction de s et de la longueur h du tronc y sont d'usage constant.

Or, en remplaçant dans (1) $\pi/4$ par 0,8, la formule obtenue

$$V^* = 0{,}8\ h s^2 \tag{2}$$

a l'avantage sur la formule (1) d'être plus exacte dans l'intervalle

$$0{,}5 \leqslant r/R \leqslant 1, \tag{3}$$

qui embrasse les cas pratiques les plus fréquents.

En effet, l'erreur de la formule (1) atteint dans l'intervalle (3) la valeur $1/28 = 3{,}57\,\%$ du vrai volume, tandis que celle de la formule (2) reste au-dessous de $2\,\%$. De plus, la formule (2) est facile à retenir et se prête à un calcul rapide aussi bien qu'à la construction des tables.

La démonstration est simple. La formule exacte

$$V = \frac{1}{3}\pi h (R^2 + Rr + r^2) \tag{4}$$

donne $V_* \leqslant V$, l'égalité n'ayant lieu que pour le cylindre ($R = r$) en vertu de l'inégalité

$$\frac{1}{4}(R + r)^2 \leqslant \frac{1}{3}(R^2 + Rr + r^2),$$