ces personnes 4 pour une partie de bridge qui se connaissent deux à deux, il faut et il suffit que chacune des 99 personnes en connaisse *plus de* 66. Si ce nombre n'est pas dépassé, il peut donc arriver qu'une telle partie de bridge soit impossible.

Exemple 2. A est un ensemble de n points dans un espace euclidien et ϱ la relation d'union par un segment. Pour que n'importe quelle figure formée de A et de quelques segments unissant ses points contienne nécessairement un triangle à sommets sur A, il faut et il suffit qu'en tout point de A aboutissent *plus de* $^n/_2$ segments.

SUR LA CONVERGENCE UNIFORME ET LA MESURABILITÉ RELATIVE

PAR

E. MARCZEWSKI ET M. NOSARZEWSKA (WROCŁAW)

Nous énonçons dans la première partie de notre communication deux théorèmes que nous n'avons pas trouvés dans les mémoires dont nous disposions; ce sont des compléments de théorèmes bien connus sur la convergence uniforme des suites de fonctions réelles.

Dans la deuxième partie de la communication, nous utilisons les résultats ainsi obtenus pour établir un théorème concernant les „distributrices" de fonctions réelles définies sur une demi-droite.

1. Convergence uniforme. Désignons d'une façon générale par $\langle \alpha, \beta \rangle$ l'intervalle fermé $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$.

Considérons les fonctions réelles dans un intervalle fixe

$$I = \langle a, b \rangle$$

et désignons par $\omega(f, x)$ l'oscillation de la fonction f au point $x \in I$.

Envisageons les conditions suivantes relatives à une suite $\{f_n\}$ de fonctions réelles dans I:

A. La suite $\{f_n\}$ est uniformément convergente dans I.

B. La suite $\{\omega(f_n)\}$ converge vers 0 partout dans I.

C. La suite $\{f_n\}$ converge vers une fonction-limite continue dans I.

La proposition suivante est une généralisation du théorème classique sur la continuité de la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions continues.

Théorème 1. *Pour que la limite d'une suite* $\{f_n\}$ *uniformément convergente dans* I *soit continue, il faut et il suffit que les oscillations de* f_n *tendent vers* 0 *partout dans* I.

En symbole: $A \rightarrow (B \rightleftarrows C)$.

Ce théorème résulte directement du lemme suivant:

Lemme. f_n *étant une suite de fonctions uniformément convergente vers* f *dans l'intervalle* I, *la suite* $\omega(f_n)$ *tend vers* $\omega(f)$ *uniformément dans* I.

Démonstration. Posons pour chaque $x \in I$ et chaque fonction réelle g dans I:

$$I_k(x) = I \cdot \langle x - {}^1/_k,\ x + {}^1/_k \rangle,$$

$$M_k(g, x) = \sup_{\xi \in I_k(x)} g(\xi), \qquad M(g, x) = \lim_{k\to\infty} M_k(g, x).$$

Evidemment, c étant un nombre réel, on a:

$$M_k(g + c, x) = M_k(g, x) + c.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe, d'après l'hypothèse de la convergence uniforme, un entier m tel qu'on ait

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon \qquad \text{pour tout } n > m \text{ et } x \in I;$$

par conséquent, pour $k = 1, 2, \ldots$:

$$M_k(f, x) - \varepsilon = M_k(f - \varepsilon, x) \leqslant M_k(f_n, x) \leqslant M_k(f + \varepsilon, x) = M_k(f, x) + \varepsilon.$$

Nous obtenons à la limite, lorsque $k \to \infty$:

$$|M(f, x) - M(f_n, x)| \leqslant \varepsilon \qquad \text{pour tout } n > m \text{ et } x \in I,$$

ce qui entraîne la convergence uniforme de la suite $M(f_n, x)$ vers la fonction $M(f, x)$.

Posons de façon analogue:

$$m(g, x) = \lim_{k\to\infty} [\inf_{\xi \in I_k(x)} g(\xi)];$$

on a donc $\omega(g, x) = M(g, x) - m(g, x)$.

Evidemment, les fonctions $m(f_n, x)$ tendent aussi uniformément vers $m(f, x)$, d'où résulte le lemme.

Théorème 2. Pour que la limite d'une suite $\{f_n\}$ de fonctions monotones dans I soit continue, il faut et il suffit que cette suite soit uniformément convergente et que les oscillations des f_n tendent vers 0 partout dans I.

En d'autres termes, on a pour les fonctions monotones dans I l'équivalence $AB \rightleftarrows C$.

En effet, l'implication $AB \to C$ est contenue dans le théorème 1, l'implication $C \to A$ pour les fonctions monotones a été demontrée par M. Polyà [1]) et l'implication $C \to B$ résulte de l'implication précédente et de l'implication $AC \to B$, contenue également dans le théorème 1.

[1]) Cf. G. Polyà und G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Band I, Berlin 1925, p. 63 et 226, N° 127.

Remarque. La condition B dans les théorèmes 1 et 2 peut être remplacée par

B'. La suite $\{\omega(f_n)\}$ converge vers 0 uniformément dans I.

2. Mesurabilité relative. E étant un ensemble mesurable (L), désignons par $\operatorname{mes}(E)$ sa mesure. Si, pour un ensemble E de nombres positifs, la limite

$$\operatorname{mes}_R(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{mes}(E \cdot \langle 0, n \rangle),$$

existe, appelons E *relativement mesurable* et le nombre $\operatorname{mes}_R(E)$ — *la mesure relative* de E [2]).

Une fonction réelle $f(x)$ définie pour $x \geqslant 0$ s'appellera *relativement mesurable* lorsque l'ensemble

$$\mathop{E}_x [f(x) < a]$$

est relativement mesurable pour chaque a réel. On pose alors:

$$F_n(a) = \frac{1}{n} \operatorname{mes}\{\mathop{E}_x [f(x) < a] \cdot \langle 0, n \rangle\},$$

$$F(a) = \lim_{n\to\infty} F_n(a) = \operatorname{mes}_R\{\mathop{E}_x [f(x) < a]\}.$$

La fonction F s'appelle la *distributrice* de f [3]) et F_n — la *n-ième distributrice approchée* de f. La distributrice et les distributrices approchées sont évidemment des fonctions non-décroissantes. On voit aisément que

$$\omega(F_n, a) = \lim_{k\to\infty} \left[F_n\left(a + \frac{1}{k}\right) - F_n\left(a - \frac{1}{k}\right) \right] =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{mes} \left\{ \mathop{E}_x \left[a - \frac{1}{k} \leqslant f(x) < a + \frac{1}{k} \right] \right\} = \frac{1}{n} \operatorname{mes} \{ f^{-1}(a) \cdot \langle 0, n \rangle \}.$$

Par conséquent, si la suite $\omega(F_n, a)$ converge, on a

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \omega(F_n, a) = \operatorname{mes}_R [f^{-1}(a)].$$

[2]) M. Kac et H. Steinhaus, *Sur les fonctions indépendantes (IV) (Intervalle infini)*, Studia Math. 7 (1938), p. 1. Les fonctions distributrices y sont appelées „distribuantes".

[3]) ibidem, p. 4.

Cette formule et le théorème 2 entraînent directement le

Théorème 3. Pour que la distributrice d'une fonction f relativement mesurable (définie pour $x \geqslant 0$) soit continue, il faut et il suffit que:

(a) *la suite des distributrices approchées soit uniformément convergente dans chaque intervalle fini,*

(b) $\text{mes}_R[f^{-1}(a)] = 0$ *pour tout a réel.*

Remarque. D'après la remarque concernant les théorèmes du N°1, si la condition (a) est remplie, la convergence (*) est uniforme dans chaque intervalle fini.

Wrocław, le 23 janvier 1947.

SUR DEUX NOTIONS DE FONCTIONS INDÉPENDANTES

PAR

S. HARTMAN (WROCŁAW).

MM. Steinhaus et Kac[1]) se servent de la définition suivante de la notion d'indépendance de fonctions: un système (A) de fonctions réelles $f_1(x), \dots, f_n(x)$ mesurables (L) définies dans l'intervalle (0,1) s'appelle système de fonctions *stochastiquement* (ou *statistiquement*) *indépendantes* si, pour tout système de $k \leqslant n$ fonctions $f_{i_1}(x), \dots, f_{i_k}(x)$ du système (A) et tout système $E_1, \dots, E_k$ d'intervalles de l'axe y (ouverts, semi-ouverts ou fermés; finis ou infinis), on a l'égalité:

$$|f_{i_1}^{-1}(E_1) \cdot \ldots \cdot f_{i_k}^{-1}(E_k)| = |f_{i_1}^{-1}(E_1)| \cdot \ldots \cdot |f_{i_k}^{-1}(E_k)|, \tag{1}$$

$|\ |$ désignant la mesure de Lebesgue.

Les fonctions indépendantes dans ce sens seront dites ici *indépendantes* (S).

M. Kolmogoroff[2]) donne une définition plus restreinte de l'indépendance de fonctions. Elle diffère de celle de l'indépendance (S) en ce que $E_1, \dots, E_k$ y sont entendus comme des ensembles arbitraires de l'axe y (même non mesurables), mais dont les images réciproques $f_{i_1}^{-1}(E_1), \dots, f_{i_k}^{-1}(E_k)$ sont mesurables.

Les fonctions indépendantes dans ce sens seront dites ici *indépendantes* (K).

M. Kolmogoroff applique sa définition non seulement aux fonctions réelles d'une variable réelle et à la mesure lebesguienne, mais aussi aux fonctions réelles définies dans un espace abstrait X et à la mesure abstraite μ dénombrablement additive, telle que $\mu(X) = 1$. Evidemment, la définition (S) se prête à la même généralisation et on voit aussitôt que l'indépendance (K) entraîne l'indépendance (S) dans tous les cas.

---

[1]) M. Kac, *Sur les fonctions indépendantes (V)*, Studia Math. 6 (1936), p. 47.

[2]) A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Ergebn. der Mathematik, Vol. II (1933), p. 50.