SUR LES RELATIONS SYMÉTRIQUES DANS L'ENSEMBLE FINI

PAR

K. ZARANKIEWICZ (VARSOVIE)

Soit A un ensemble fini composé de n éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$ quelconques.

Une relation ϱ définie pour certains couples (pas nécessairement tous) d'éléments de A, antiréflexive (c.-à-d. telle que a_i non $\varrho\, a_i$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$), mais symétrique (c.-à-d. telle que $a_{i'} \varrho\, a_{i''}$ entraîne $a_{i''} \varrho\, a_{i'}$ pour tout $i' \neq i''$ où $i' = 1, 2, \ldots, n$ et $i'' = 1, 2, \ldots, n$), sera dite *au moins k-voque* s'il existe dans A, pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, au moins k éléments distincts $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ tels que

$$a_i \,\varrho\, a_{i_j} \qquad \text{pour tout } j = 1, 2, \ldots, k.$$

Le théorème qui va être démontré concerne la question suivante: existe-t-il dans A un sous-ensemble A^* composé de p éléments qui sont en relation ϱ deux à deux? On verra qui si la multivocité k de la relation ϱ dans A est suffisamment élevée[1]), un tel A^* existe toujours.

Théorème. Les propositions I *et* II *qui suivent sont équivalentes:*

I. *Trois entiers: $n > k > 0$ et $p > 1$ étant donnés, tout ensemble A de n éléments admet, quelle que soit la relation au moins k-voque ϱ définie dans lui, au moins un sous-ensemble A^* de p éléments liés deux à deux par la relation ϱ.*

II. *On a l'inégalité* $k > \dfrac{p-2}{p-1} n$.

Démonstration. Pour établir l'implication I→II, nous allons supposer — contrairement à II — que

$$k \leqslant \frac{p-2}{p-1} n; \tag{1}$$

il suffit de définir dans A une relation (antiréflexive et symétrique) au moins k-voque ϱ de façon que — contrairement à I — l'ensemble A n'admette aucun sous-ensemble A^* de p éléments liés deux à deux par cette relation.

Représentons n (nombre d'éléments de A) dans la forme

$$n = (p-1)q + r \tag{2}$$

avec q entier positif et r assujetti à la condition

$$0 \leqslant r < p - 1. \tag{3}$$

Décomposons A en $p-1$ sous-ensembles disjoints:

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_r + \ldots + A_{p-1} \tag{4}$$

dont les r premiers sont à $q+1$ éléments et les autres — à q éléments.

Définissons la relation ϱ comme liant tout couple d'éléments de A qui appartiennent à des sommandes différents de la décomposition (4).

Ainsi définie, la relation ϱ est évidemment antiréflexive et symétrique. Evaluons sa multivocité dans A.

Assignons à tout élément a de A le nombre $k(a)$ d'éléments de A qui sont en relation ϱ avec a. On a évidemment pour tout $a' \in A_1 + \ldots + A_r$, vu la définition de ces sommandes:

$$k(a') = n - (q+1), \tag{5}$$

d'où, en éliminant q selon (2):

$$k(a') = \frac{p-2}{p-1} n + \frac{r}{p-1} - 1$$

et par conséquent, comme $0 \leqslant \dfrac{r}{p-1} < 1$ d'après (3):

$$k(a') \leqslant \frac{p-2}{p-1} n. \tag{6}$$

On a de même pour tout $a'' \in A_{r+1} + \ldots + A_{p-1}$ selon la définition de ces sommandes et en vertu de (5):

$$k(a'') = n - q = k(a') + 1.$$

Il en résulte en vertu de (4) que la relation ϱ est au moins $k(a')$-voque. En vertu de (6), le nombre $k = k(a')$ satisfait donc à (1).

Enfin, si un sous-ensemble A^* de A était formé de p éléments dont tout couple est en relation ϱ, chacun de ces éléments

[1]) Il m'a semblé d'abord que la condition cherchée est $p = k$; les premiers exemples contredisant cette supposition m'ont été communiqués par MM. Sierpiński, Mostowski et Steinhaus.

appartiendrait nécessairement, vu la définition de ϱ, à un sommande distinct de la décomposition (4) de A — ce qui est impossible [2]), puisqu'il n'y a que $p-1$ sommandes.

Pour établir l'implication II→I, nous allons procéder par l'induction finie selon p. L'implication est vraie pour $p=2$, car II devient alors $k>0$, ce qui garantit l'existence, pour tout a_i de A, d'un a_j de A tel que $a_i \varrho a_j$. Le couple a_i, a_j constitue donc le sous-ensemble A^* satisfaisant à I.

Admettons que II entraîne I pour un $p \geqslant 2$; il s'agit d'en déduire la même implication pour $p+1$. Posons donc conformément à II (avec $p+1$ au lieu de p):

$$k > \frac{p-1}{p} n. \tag{7}$$

Comme $\frac{p-1}{p} > \frac{p-2}{p-1}$, le nombre k satisfait à plus forte raison à la condition II pour p; en vertu de l'implication II→I admise pour p, il existe donc dans A, pour toute relation ϱ au moins k-voque, un sous-ensemble

$$A^* = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\} \tag{8}$$

dont les éléments sont en relation ϱ deux à deux. Afin de réaliser I pour $p+1$, il suffit donc d'établir l'existence d'un élément a_{p+1} de $A - A^*$ qui se trouve en relation ϱ avec chacun des p éléments de A^*.

Assignons à tout a_i de A^* l'ensemble $K(a_i)$ composé de tous les éléments de $A - A^*$ qui sont en relation ϱ avec a_i.

Reste à prouver que

$$\textit{l'ensemble } \prod_{i=1}^{p} K(a_i) \textit{ n'est pas vide,} \tag{9}$$

puisqu'on n'aura alors qu'à désigner par a_{p+1} l'un de ses éléments.

Or, l'inégalité (7) équivaut trivialement à la suivante:

$$k-(p-1) > \frac{p-1}{p}(n-p). \tag{10}$$

A contenant par hypothèse au moins k éléments qui sont en relation ϱ avec tout a_i donné de A^*, et A^* ne contenant d'après (8) que $p-1$ éléments distincts de a_i, le nombre d'éléments

[2]) en vertu du principe de Dirichlet.

de $K(a_i)$ est par définition, pour tout $i=1,2,\ldots,p$, au moins égal au membre gauche de l'inégalité (10), donc — en vertu de cette inégalité — supérieur à son membre droit, c'est-à-dire précisément à la $\frac{p-1}{p}$-ème partie du nombre d'éléments de $A-A^*$.

Il en résulte que, pour tout $i=1,2,\ldots,p$, le nombre d'éléments de $(A-A^*)-K(a_i)$ est inférieur à $\frac{1}{p}$-ème partie de celui d'éléments de $A-A^*$ et, par conséquent, que l'ensemble $\sum_{i=1}^{p}[(A-A^*)-K(a_i)]$ ne renferme pas $A-A^*$ tout entier. Cela revient à dire que l'ensemble

$$(A-A^*)-\sum_{i=1}^{p}[(A-A^*)-K(a_i)] = \prod_{i=1}^{p} K(a_i)$$

n'est pas vide. Ainsi (9) se trouve établi, ce qui achève la démonstration.

Ajoutons deux remarques suivantes:

1° Il suffit, pour obtenir I, de n'admettre II que pour le nombre $k(a)$ assigné à un seul élément a de A, en remplaçant pour les autres le signe $>$ par $\geqslant$. Cette généralisation du théorème est due à M. L. Finkielsztejn.

2° Toute relation antiréflexive et symétrique ϱ, définie dans un ensemble A, est *semblable* à celle de disjonction d'ensembles (de même qu'à celle d'intersection d'ensembles distincts) d'une certaine classe. C'est-à-dire qu'on peut faire correspondre à tout a de A un ensemble $E(a)$ de façon que $a' \varrho a''$ entraîne toujours $E(a') \cdot E(a'') = 0$ et réciproquement [3]), la correspondance étant biunivoque. Tout théorème sur les relations antiréflexives et symétriques, donc en particulier celui qui vient d'être établi, est ainsi en même temps un théorème sur les ensembles disjoints et vice versa.

Et voici, pour terminer, deux applications du théorème:

Exemple 1. A est l'ensemble de 99 personnes et ϱ la relation de connaissance. Pour qu'on puisse être sûr, *quelle que soit la distribution des connaissances mutuelles,* de trouver parmi

[3]) E. Marczewski, Fundam. Math. 33 (1945), p. 305.

ces personnes 4 pour une partie de bridge qui se connaissent deux à deux, il faut et il suffit que chacune des 99 personnes en connaisse *plus de* 66. Si ce nombre n'est pas dépassé, il peut donc arriver qu'une telle partie de bridge soit impossible.

Exemple 2. A est un ensemble de n points dans un espace euclidien et ϱ la relation d'union par un segment. Pour que n'importe quelle figure formée de A et de quelques segments unissant ses points contienne nécessairement un triangle à sommets sur A, il faut et il suffit qu'en tout point de A aboutissent *plus de* $^n/_2$ segments.

SUR LA CONVERGENCE UNIFORME ET LA MESURABILITÉ RELATIVE

PAR

E. MARCZEWSKI ET M. NOSARZEWSKA (WROCŁAW)

Nous énonçons dans la première partie de notre communication deux théorèmes que nous n'avons pas trouvés dans les mémoires dont nous disposions; ce sont des compléments de théorèmes bien connus sur la convergence uniforme des suites de fonctions réelles.

Dans la deuxième partie de la communication, nous utilisons les résultats ainsi obtenus pour établir un théorème concernant les „distributrices" de fonctions réelles définies sur une demi-droite.

1. Convergence uniforme. Désignons d'une façon générale par $\langle \alpha, \beta \rangle$ l'intervalle fermé $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$.

Considérons les fonctions réelles dans un intervalle fixe

$$I = \langle a, b \rangle$$

et désignons par $\omega(f, x)$ l'oscillation de la fonction f au point $x \in I$.

Envisageons les conditions suivantes relatives à une suite $\{f_n\}$ de fonctions réelles dans I:

A. La suite $\{f_n\}$ est uniformément convergente dans I.

B. La suite $\{\omega(f_n)\}$ converge vers 0 partout dans I.

C. La suite $\{f_n\}$ converge vers une fonction-limite continue dans I.

La proposition suivante est une généralisation du théorème classique sur la continuité de la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions continues.

Théorème 1. *Pour que la limite d'une suite $\{f_n\}$ uniformément convergente dans I soit continue, il faut et il suffit que les oscillations de f_n tendent vers* 0 *partout dans I.*

En symbole: $A \rightarrow (B \rightleftarrows C)$.

Ce théorème résulte directement du lemme suivant:

Lemme. f_n étant une suite de fonctions uniformément convergente vers f dans l'intervalle I, la suite $\omega(f_n)$ tend vers $\omega(f)$ uniformément dans I.